Gans : Introducción al Análisis vectorial

39

MANUALES TÉCNICOS LABOR

Dr. RICHARD GANS

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS VECTORIAL

EDITORIAL LABOR, S. A.

MANUALES TÉCNICOS LABOR

Introducción
al
Análisis vectorial
con aplicaciones a la Física Matemática

POR EL

Dr. RICHARD GANS

Profesor de Física matemática de la Universidad de Königsberg
Ex Profesor de Física de la Universidad de La Plata

TRADUCCIÓN DE LA QUINTA EDICIÓN ALEMANA

POR EL

Prof. J. ÁLVAREZ UDE

De la Facultad de Ciencias de Madrid

Con 40 figuras

SEGUNDA EDICIÓN
REIMPRESIÓN

EDITORIAL LABOR, S. A.
BARCELONA - MADRID - BUENOS AIRES - RIO DE JANEIRO
1946

ES PROPIEDAD

Primera edición : 1929
Segunda edición : 1940
Reimpresión : 1946

Imprenta Elzeviriana y Librería Camí, S. A. - Torres Amat, 9 - Barcelona
Reproducción Offset: Gratos, S. A. - Av. Carlos I, 157 - Barcelona

ÍNDICE DE MATERIAS

CAPÍTULO I

Operaciones elementales del análisis vectorial

Págs.

1. Magnitudes escalares y vectoriales. Campos escalares y vectoriales. Representación geométrica de un campo. 1
2. Representación de un vector por medio de sus componentes 6
3. Adición de vectores 8
4. Producto escalar 18
5. Producto vectorial 21
6. Algunas relaciones entre productos escalares y productos vectoriales 28
7. Movimiento de un electrón en un campo magnético constante 33

CAPÍTULO II

Las operaciones diferenciales del análisis vectorial

1. El gradiente 38
2. La divergencia y el teorema de la integral de Gauss .. 46
3. Los rotacionales y el teorema de Stokes 51
4. Relaciones entre las operaciones diferenciales 57
5. Teorema de Green 64
6. Discontinuidades 68
7. Derivadas respecto del tiempo 71

Capítulo III

Coordenadas curvilíneas. Descomposición de vectores. Deformaciones mecánicas

Págs.

1. El elemento de línea en coordenadas curvilíneas ortogonales 76
2. Las operaciones vectoriales en coordenadas curvilíneas. 79
3. La ecuación del potencial y la ecuación de las ondas.. 82
4. Descomposición de un vector en un vector potencial y otro solenoidal 89
5. Deformaciones mecánicas 93
6. Sistema giratorio de referencia 96

Capítulo IV

Tensores

1. Funciones vectoriales lineales; definición y representación geométrica de un tensor 99
2. Tensores especiales. Elipsoide de inercia. El movimiento del peón 112
3. Corrimientos infinitesimales 120
4. Tensiones o esfuerzos superficiales 122
5. Expresión de la deformación y de las presiones en coordenadas ortogonales 127

Capítulo V

Aplicaciones a la Hidrodinámica y a la Electrodinámica

1. Ecuaciones de Euler en la Hidrodinámica 131
2. Teoremas de Helmholtz en la Hidrodinámica 134
3. Corrimientos electrolíticos 137
4. Ecuaciones de Maxwell 140
5. Tres integrales de las ecuaciones de Maxwell..... 147
6. Las ecuaciones en derivadas parciales de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{H}$.... 152

Págs.

7. Ecuaciones de Hertz para medios en movimiento..... 155
8. Las fuerzas ponderomotrices de la teoría de Maxwell-Hertz 156
9. Inducción en una esfera que gira..... 161
10. La teoría electrónica de Lorentz..... 165
11. Transformación de las ecuaciones de Lorentz..... 169
12. Potenciales retardados..... 172

Tabla de fórmulas 180

Tensores..... 184

Índice alfabético..... 185

CAPÍTULO I

Operaciones elementales del Análisis vectorial

1. Magnitudes escalares y vectoriales. Campos escalares y vectoriales. Representación geométrica de un campo

Se distinguen en Física dos especies de magnitudes, esencialmente diferentes unas de otras : las escalares y las vectoriales.

Se llaman *escalares* las magnitudes que, una vez fijada la unidad de medida, quedan completamente determinadas por el conocimiento de un solo número ; y *vectoriales* aquellas otras cuya total determinación exige el conocimiento, no sólo de su longitud, sino también el de su dirección en el espacio, y como una dirección queda fijada a partir de un punto por dos datos numéricos (por ejemplo la longitud y la latitud geográfica en una esfera cuyo centro es el punto considerado), un vector queda determinado por medio de *tres* números, en tanto que una magnitud escalar lo es por *uno*.

Ejemplos de magnitudes escalares son la temperatura, el peso específico, la conductibilidad ; mientras que son vectoriales las traslaciones, las velocidades, las fuerzas, las intensidades de los campos eléctricos.

Si a cada punto de un recinto espacial finito, o del espacio infinito, se le asigna un valor determinado de una propiedad física cuantitativamente medible, de

tal manera, por consiguiente, que esta magnitud sea una función del lugar en la parte de espacio considerado, se dice que este espacio, como *base* o *sostén* de aquella propiedad física, es un *campo* ; así por ejemplo, se habla de campos de temperatura, campos eléctricos, campos de fuerzas, etc., y según que la magnitud representada en el campo sea escalar o vectorial se dice que el campo es escalar o vectorial, respectivamente.

Para formarse más fácilmente idea de la naturaleza de un campo, es de gran importancia encontrar métodos para representarlo geométricamente, de tal manera que de la representación misma puedan deducirse las propiedades fundamentales del campo.

Supongamos, por ejemplo, dado un campo escalar, y sea U una propiedad física cualquiera, función continua del espacio, tal que sólo pueda dejar de ser continua en puntos, líneas o superficies aisladas. Sea p_0 un punto, del cual partimos, en el que la función U tiene el valor U_0, y consideremos todos los puntos del espacio en los que U tiene este mismo valor U_0. El lugar geométrico de todos estos puntos es una superficie, llamada *superficie de nivel*, que puede ser cerrada o extenderse hasta los límites del campo ; y aun puede darse el caso de que todos los puntos en los que es $U = U_0$ formen varias superficies separadas unas de otras.

Si se construyen varias superficies de nivel, $U = \text{const.}$, correspondientes a distintos valores de la constante, se llega a tener una idea bastante intuitiva del campo. Para completar esta representación supondremos construídas las superficies correspondientes a valores equidistantes de las constantes. La figura 1 da un ejemplo de una representación de esta naturaleza. La variación más rápida de U al pasar de una superficie de nivel a otra se verifica moviéndose normalmente a las superficies de nivel. Moviéndose sin salir de una superficie, el valor de U no cambia (según la definición

de superficie de nivel). Cuánto más próximas entre sí estén las superficies en una porción del espacio, tanto más rápidamente varía allí la propiedad representada por la magnitud escalar U.

Dos superficies de nivel correspondientes a valores distintos de U no pueden cortarse, porque si lo hicieran, en todos los puntos de la línea de intersección tendría U los dos valores, cosa imposible, puesto que se trata exclusivamente de propiedades unívocas ; las superficies se envuelven, pues, a manera de capas.

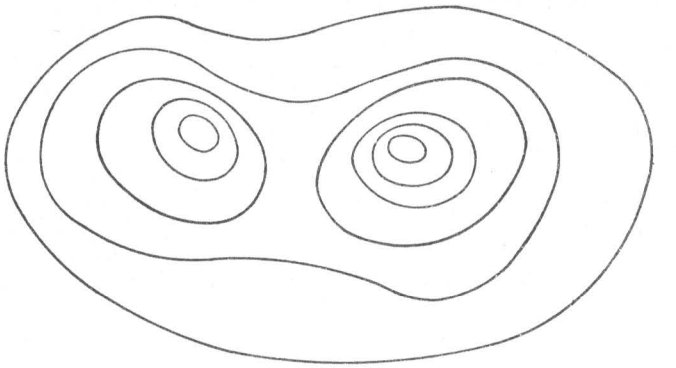

FIG. 1

Designaremos siempre las magnitudes escalares con letras latinas y las vectoriales con letras góticas ; el valor absoluto o *módulo* de un vector $\mathfrak{A}$ por la notación, corriente en Teoría de funciones, $|\mathfrak{A}|$. Cuando se trata de representar geométricamente vectores aislados (en oposición a un *campo vectorial*) se hace por medio de segmentos, cuya dirección sea la de los vectores correspondientes y cuyas longitudes sean proporcionales a las magnitudes de éstos. El coeficiente de proporciona-

lidad es arbitrario, pero debe fijarse de una vez para siempre. Según esto, dos vectores son iguales entre sí cuando los segmentos que los representan tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido.

Para representar un campo vectorial, seguiremos el siguiente procedimiento : Partiendo de un punto, p_0, tomamos un segmento infinitamente pequeño sobre una recta que tenga la dirección del vector $\mathfrak{A}$; se obtiene

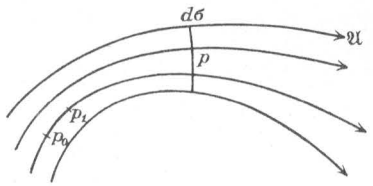

FIG. 2

así, como extremo de este segmento, un punto infinitamente próximo, p_1 (fig. 2), a partir del cual, como antes, se lleva en la dirección del vector correspondiente un segmento infinitamente pequeño, etc. Se obtiene así una línea, generalmente alabeada, cuyas tangentes tienen la misma dirección de los vectores correspondientes a los puntos de contacto. Para dar idea de la magnitud del vector en cada punto se traza en un punto, p, de la curva así construída y normalmente a la misma un elemento infinitamente pequeño de superficie, $d\sigma$, y sobre cada unidad de superficie se toman tantos puntos como indica la magnitud del vector, y, de la misma manera que antes, se construye la línea $\mathfrak{A}$ correspondiente a cada uno de estos puntos, que determina por la dirección de sus tangentes la de los vectores. Se obtiene así un sistema de líneas $\mathfrak{A}$, que por su dirección y *densidad* dan idea de la dirección y magnitud del vector, puesto

que la dirección de la línea $\mathfrak{A}$ es la misma del vector y el número de líneas $\mathfrak{A}$ que hay en una unidad de superficie (supuesta infinitamente pequeña) normal a una línea $\mathfrak{A}$ expresa la magnitud del vector.

Es de observar que no puede ocurrir que dos curvas distintas se corten, porque de hacerlo, la dirección no sería única en el punto de intersección.

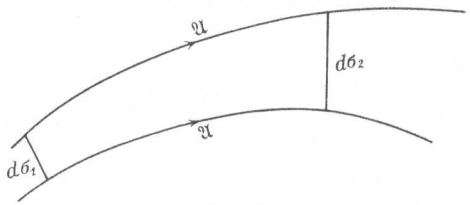

FIG. 3

Ahora probaremos que no puede excluirse la posibilidad de que se originen nuevas líneas vectoriales $\mathfrak{A}$, o de que desaparezcan algunas ya existentes.

Tracemos en el campo del vector $\mathfrak{A}$ (fig. 3), cuyas líneas han sido construídas siguiendo el procedimiento antes indicado, y en uno cualquiera de sus puntos, un elemento de superficie, $d\sigma_1$, normal a la dirección del vector existente en dicho punto de valor absoluto $|\mathfrak{A}_1|$, y consideremos el haz de las líneas $\mathfrak{A}$ que atraviesan el elemento $d\sigma_1$ y está formado por un número $|\mathfrak{A}_1|\, d\sigma_1$ de líneas, y fijémonos especialmente en el curso de las líneas de este haz normales a $d\sigma_1$ en su contorno. Tales líneas formarán un tubo, en cuyo interior se encuentran otras líneas $\mathfrak{A}$. Si en un punto cualquiera del tubo su sección es $d\sigma_2$, según el método seguido en la construcción habrá $|\mathfrak{A}_2|\, d\sigma_2$ líneas $\mathfrak{A}$ normales a $d\sigma_2$, suponiendo que sea $|\mathfrak{A}_2|$ la longitud del vector en aquel punto ; y según sea $|\mathfrak{A}_2|\, d\sigma_2 \gtrless |\mathfrak{A}_1|\, d\sigma_1$, deberán haberse

originado o dejado de existir, dentro del tubo, entre las secciones $d\sigma_1$ y $d\sigma_2$, líneas $\mathfrak{A}$, puesto que la superficie del tubo, compuesta por líneas $\mathfrak{A}$, no puede ser atravesada por ninguna línea $\mathfrak{A}$, ya que, de otro modo, habría líneas vectoriales que se cortarían.

2. Representación de un vector por medio de sus componentes

Para representar un vector por medio de sus componentes, lo referimos a un sistema de coordenadas rectangulares y determinamos el vector por medio de sus proyecciones ortogonales sobre los tres ejes de coordenadas. Designaremos estas componentes por $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$ y $\mathfrak{A}_z$.

Supondremos ahora, y lo mismo haremos en adelante, que el sistema de coordenadas es *directo*, es decir, que una rotación de un ángulo recto que lleve a coincidir el semieje positivo de las x con el positivo de las y y una traslación simultánea en el sentido positivo del eje z compongan un movimiento helicoidal directo, correspondiendo, pues, al conocido movimiento del sacacorchos ; en consecuencia, para relacionar entre sí una rotación y una traslación de esta naturaleza, hablaremos en lo que sigue simplemente de la regla del sacacorchos.

Si x, y, z es un sistema directo, también lo son los y, z, x y z, x, y, es decir, que pueden permutarse cíclicamente las tres direcciones ; por el contrario, y, x, z ; z, y, x y x, z, y son sistemas retrógrados o inversos.

La representación de un vector por sus tres componentes en las direcciones de tres ejes rectangulares tiene, respecto de otro sistema coordenado, la ventaja de la simetría, pero el cálculo directo de los vectores, sin intermedio de ninguna especie de representación, es el más natural y, por consiguiente, preferible.

El *valor absoluto* del vector $\mathfrak{A}$, o *módulo* de $\mathfrak{A}$, se expresa en función de sus tres componentes del siguiente modo :

$$|\mathfrak{A}| = \sqrt{\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2}. \qquad (1)$$

En esta sencilla expresión se advierte ya que en el segundo miembro nada indica que sea independiente del sistema coordenado, mientras que el primer miembro, que corresponde a la notación vectorial, lo indica inmediatamente.

Los ángulos que forma $\mathfrak{A}$ con los ejes de coordenadas se deducen de las fórmulas :

$$\cos(\mathfrak{A}, x) = \frac{\mathfrak{A}_x}{|\mathfrak{A}|}, \quad \cos(\mathfrak{A}, y) = \frac{\mathfrak{A}_y}{|\mathfrak{A}|}, \quad \cos(\mathfrak{A}, z) = \frac{\mathfrak{A}_z}{|\mathfrak{A}|}. \qquad (2)$$

Las componentes se cuentan como positivas o negativas según que el vector (contado desde el origen hacia el extremo) forme con el eje coordenado respectivo un ángulo agudo u obtuso.

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce :

$$|\mathfrak{A}| = \mathfrak{A}_x \cos(\mathfrak{A}, x) + \mathfrak{A}_y \cos(\mathfrak{A}, y) + \mathfrak{A}_z \cos(\mathfrak{A}, z). \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) expresan las relaciones características entre un vector y sus componentes.

La proyección de $\mathfrak{A}$ sobre una dirección cualquiera s recibe el nombre de componente de $\mathfrak{A}$ en la dirección s, y la designaremos por $\mathfrak{A}_s$; será, pues,

$$\mathfrak{A}_s = |\mathfrak{A}| \cos(\mathfrak{A}, s),$$

o bien, aplicando una conocida fórmula de Geometría analítica :

$$\mathfrak{A}_s = |\mathfrak{A}| \{\cos(\mathfrak{A}, x)\cos(s, x) + \cos(\mathfrak{A}, y)\cos(s, y) + \cos(\mathfrak{A}, z)\cos(s, z)\},$$

e introduciendo las componentes ortogonales por medio de las fórmulas (2) :

$$\mathfrak{A}_s = \mathfrak{A}_x \cos(s, x) + \mathfrak{A}_y \cos(s, y) + \mathfrak{A}_z \cos(s, z). \quad (4)$$

3. Adición de vectores

Entenderemos por suma, $\mathfrak{C}$, de dos vectores, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \quad (1)$$

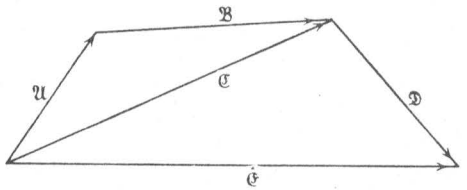

FIG. 4

la *suma geométrica* ; es decir, se imagina el vector $\mathfrak{B}$ trasladado paralelamente a sí mismo hasta que su origen coincida con el extremo de $\mathfrak{A}$; el segmento que une el origen de $\mathfrak{A}$ con el extremo de $\mathfrak{B}$ representa entonces en magnitud y dirección la suma $\mathfrak{C}$ (fig. 4).

La suma de vectores goza de la propiedad conmutativa :

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \quad (2)$$

como se deduce inmediatamente de la definición dada para la adición. Si se quiere agregar al vector $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ el $\mathfrak{D}$, se aplica la misma construcción (fig. 4) y resulta :

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{D}. \quad (3)$$

También en este caso se puede cambiar arbitrariamente el orden de los sumandos ; además se *verifica la ley asociativa* :

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{D} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{D}. \quad (4)$$

La suma de un número cualquiera de vectores se obtiene, pues, por traslación paralela de los mismos, de tal manera que formen una línea poligonal ; el segmento de unión del origen del primer vector con el extremo del último representa la suma de los vectores considerados.

Por *diferencia* $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ de dos vectores entenderemos el vector $\mathfrak{C}$, que tiene la propiedad de ser (fig. 5)

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}. \quad (5)$$

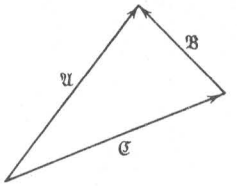

FIG. 5

Si suponemos conocido $\mathfrak{C}$, según la ecuación (5), obtendremos $\mathfrak{A}$ aplicando a los vectores $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ el método dado para sumar (fig. 5). De la inspección de la figura se deduce que se obtiene $\mathfrak{C}$, dados $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, cambiando el sentido del $\mathfrak{B}$ y sumando el vector resultante con el $\mathfrak{A}$. Representaremos el vector obtenido cambiando el sentido del $\mathfrak{B}$ por $-\mathfrak{B}$, y entonces podremos decir :

La diferencia $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ *se obtiene por sumación geométrica de* $\mathfrak{A}$ *y* $-\mathfrak{B}$.

De esta manera se ha reducido la sustracción a la adición y podemos sumar (o restar) vectores de un modo completamente general, sin más que construir por medio de traslaciones paralelas una línea poligonal tal que el origen (o el extremo) de cada vector coincida con el vértice últimamente obtenido de la línea poligonal.

Esta línea poligonal no será, en general, plana. Si la línea es cerrada, la suma de los vectores es nula.

En la figura 6*a* se han dado los vectores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, y la figura 6 *b* representa la suma $\mathfrak{E}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$.

Como en cualquiera traslación paralela de un vector no cambian sus componentes respecto de un sistema

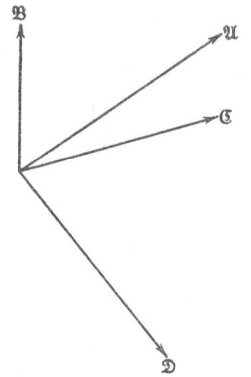

FIG. 6 *a*

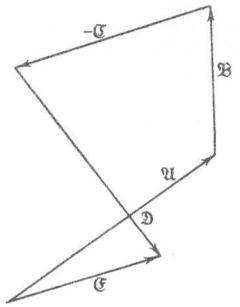

FIG. 6 *b*

de coordenadas rectangulares, las componentes de la suma de varios vectores se obtienen como suma de las componentes respectivas de los sumandos; por consiguiente, las componentes de $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$ son:

$$\mathfrak{A}_x+\mathfrak{B}_x-\mathfrak{C}_x+\mathfrak{D}_x \quad \mathfrak{A}_y+\mathfrak{B}_y-\mathfrak{C}_y+\mathfrak{D}_y, \quad \mathfrak{A}_z+\mathfrak{B}_z-\mathfrak{C}_z+\mathfrak{D}_z.$$

Sumando un vector, $\mathfrak{A}$, consigo mismo se obtiene un resultado, que llamaremos $2\mathfrak{A}$, que es un vector de la misma dirección y sentido que $\mathfrak{A}$ y de doble longitud, como se deduce inmediatamente de la definición de suma.

Esto puede generalizarse y resulta:

Si m es una magnitud escalar y $\mathfrak{A}$ un vector, $m\mathfrak{A}$ es un vector de longitud m veces mayor y del mismo o contrario sentido que $\mathfrak{A}$, según que respectivamente sea $m \gtrless 0$.

Si $\mathfrak{A}$ es un vector que, en un espacio S, está dado como función del lugar, y dS representa un elemento de volumen, es decir, una magnitud escalar, $\mathfrak{A}dS$ es un vector del mismo sentido que el $\mathfrak{A}$ y su módulo es el producto de dS por $\mathfrak{A}$. Sumando los vectores así obtenidos y extendiendo la suma a todo el espacio S, se obtiene $\int_S \mathfrak{A}dS$. La integral indica una *suma vectorial* de los vectores infinitamente pequeños $\mathfrak{A}dS$ y, por tanto, representa también un vector.

Si, por ejemplo, $\mathfrak{A}$ es la fuerza por unidad de volumen, $\int_S \mathfrak{A}dS$ es la fuerza total en el cuerpo de volumen S.

La adición de vectores se aplica, en Mecánica por ejemplo, a la composición de fuerzas. La resultante corresponde a la suma (paralelogramo de las fuerzas).

Teorema 1.° Si entre dos vectores, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, existe una relación de la forma:

$$a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} = 0, \tag{6}$$

donde a y b son escalares, los vectores tienen el mismo o contrario sentido según que, respectivamente, sea $\frac{b}{a} \lesseqgtr 0$.

Demostración. De (6) se deduce:

$$\mathfrak{A} = -\frac{b}{a}\mathfrak{B}, \tag{7}$$

lo que demuestra el teorema.

El **teorema 2.°**, recíproco del anterior, es también cierto. Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen el mismo sentido o sentidos contrarios, entre ellos existe una relación de la forma (6), como fácilmente se demuestra.

El teorema 1.° se puede demostrar también del siguiente modo, utilizando la representación de los vectores por sus componentes. La ecuación (6) equivale a estas otras :

$$\begin{aligned} a\mathfrak{A}_x + b\mathfrak{B}_x &= 0, \\ a\mathfrak{A}_y + b\mathfrak{B}_y &= 0, \\ a\mathfrak{A}_z + b\mathfrak{B}_z &= 0, \end{aligned} \qquad (6')$$

de las que se deduce $\frac{\mathfrak{A}_x}{\mathfrak{B}_x} = \frac{\mathfrak{A}_y}{\mathfrak{B}_y} = \frac{\mathfrak{A}_z}{\mathfrak{B}_z}$, o bien, teniendo en cuenta (2), § 2 :

$$\frac{\cos(\mathfrak{A}, x)}{\cos(\mathfrak{B}, x)} = \frac{\cos(\mathfrak{A}, y)}{\cos(\mathfrak{B}, y)} = \frac{\cos(\mathfrak{A}, z)}{\cos(\mathfrak{B}, z)} = \lambda; \qquad (8)$$

pero como la suma de los cuadrados de los cosenos directores de cualquier recta es igual a 1, será $\lambda = \pm 1$, es decir :

$$\cos(\mathfrak{A}, x) = \pm \cos(\mathfrak{B}, x); \qquad \cos(\mathfrak{A}, y) = \pm \cos(\mathfrak{B}, y);$$

$$\cos(\mathfrak{A}, z) = \pm \cos(\mathfrak{B}, z).$$

Teorema 3.° Tres vectores están en un plano si se pueden determinar tres números a, b, c, tales que se verifique :

$$a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} = 0\,. \qquad (9)$$

Pues entonces es

$$\mathfrak{C} = -\frac{a}{c}\mathfrak{A} - \frac{b}{c}\mathfrak{B}, \qquad (10)$$

y como $-\frac{a}{c}\mathfrak{A}$ y $-\frac{b}{c}\mathfrak{B}$ son vectores que tienen el mismo o contrario sentido que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, respectivamente, su suma, $\mathfrak{C}$, según el procedimiento antes dado para obtenerla, está en el plano determinado por $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

Expresando la (9) en componentes rectangulares, resulta :

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A}_x & \mathfrak{B}_x & \mathfrak{C}_x \\ \mathfrak{A}_y & \mathfrak{B}_y & \mathfrak{C}_y \\ \mathfrak{A}_z & \mathfrak{B}_z & \mathfrak{C}_z \end{vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Teorema 4.°, recíproco del anterior. Geométricamente se reconoce fácilmente su certeza, es decir, que siempre existe una ecuación de la forma (9) cuando $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ están en un plano.

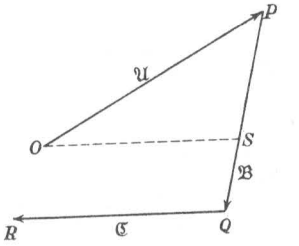

FIG. 7

Pues trazando el contorno poligonal correspondiente a los tres vectores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, como se ha representado en la figura 7 con el contorno $OPQR$, y trazando la recta OS paralela a QR, el vector $\vec{PS}$ tiene la dirección de $\mathfrak{B}$ y, por tanto, es igual a $\frac{b}{a}\mathfrak{B}$, si ponemos $\frac{PS}{\overline{PQ}} = \frac{b}{a}$; y de la misma manera, supuesto $\frac{SO}{\overline{QR}} = \frac{c}{a}$ es $\vec{SO} = \frac{c}{a}\mathfrak{C}$. Pero como $OPSO$ es un contorno cerrado, se tiene :

$$\vec{OP} + \vec{PS} + \vec{SO} = \mathfrak{A} + \frac{b}{a}\mathfrak{B} + \frac{c}{a}\mathfrak{C} = 0.$$

Teorema 5.° Si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ son vectores cualesquiera, diferentes de cero, tales que de tres en tres no estén

en un plano, existe siempre una ecuación de la forma :

$$a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} + e\mathfrak{E} = 0, \qquad (12)$$

es decir, cada uno de los vectores puede expresarse como función lineal y homogénea de los otros tres. Para demostrar esto, podemos dividir la (12) por e y resulta :

$$\frac{a}{e}\mathfrak{A} + \frac{b}{e}\mathfrak{B} + \frac{c}{e}\mathfrak{C} + \mathfrak{E} = 0. \qquad (12')$$

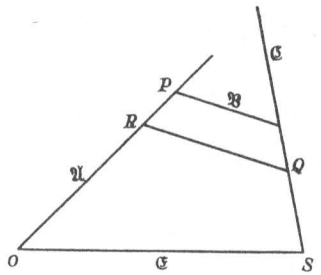

FIG. 8

Tracemos ahora (fig. 8) por el origen y el extremo del vector $\mathfrak{E}$ rectas respectivamente paralelas a los vectores $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{A}$, que por razón de sencillez representaremos por estas mismas letras $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{A}$. Por hipótesis, estas tres rectas no están en un plano. Por un punto cualquiera, P, de la recta $\mathfrak{A}$ tracemos otra, $\mathfrak{B}$, paralela al vector $\mathfrak{B}$ y construyamos el plano determinado por las rectas $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, el cual cortará a la $\mathfrak{C}$ en un punto Q. Por último, tracemos por Q la paralela a $\mathfrak{B}$, que corta a la $\mathfrak{A}$ en R. Obtenemos así un contorno poligonal cerrado, $ORQSO$, uno de cuyos lados, el SO, es el vector $\mathfrak{E}$, mientras que los otros, OR, RQ y QS son paralelos a los vectores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, luego se verifica la relación (12').

Por el contrario, si tres vectores, tales como los $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ están en un plano que no contiene al cuarto vector, en este plano está también el vector $\frac{a}{e}\mathfrak{A} + \frac{b}{e}\mathfrak{B} + \frac{c}{e}\mathfrak{C}$, cualesquiera que sean los valores de $\frac{a}{e}$, $\frac{b}{e}$ y $\frac{c}{e}$, luego este vector no puede ser igual a $-\mathfrak{E}$, puesto que por hipótesis, $\mathfrak{E}$ no está en dicho plano.

Esto mismo puede verse también analíticamente. Suponiendo dados $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, se puede expresar $\mathfrak{E}$ por medio de las tres razones a/e, b/e, c/e, puesto que $\mathfrak{E}$, como cualquier otro vector, puede determinarse por tres números. Si, por ejemplo, se escribe (12') en coordenadas rectangulares, se obtienen tres ecuaciones lineales, no homogéneas, que sirven para determinar a/e, b/e y c/e, si no se anula el determinante (11), es decir, si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ no están en un plano.

Derivada de un vector. Si $\mathfrak{A}$ es función de un parámetro escalar, t (por ejemplo, el tiempo), $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ representa un vector que está definido por la relación :

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \lim_{h=0} \frac{\mathfrak{A}(t+h) - \mathfrak{A}(t)}{h}, \qquad (13)$$

en la que $\mathfrak{A}(t+h)$ y $\mathfrak{A}(t)$ no tienen, en general, la misma dirección ; por consiguiente, la diferencia que aparece en (13) es una *diferencia vectorial.*

Curvatura de una línea alabeada. Designemos el radio vector que va de un punto fijo, arbitrario, O, a un punto, P, de una curva alabeada por $\mathfrak{r}$ (fig. 9) y supongamos determinado este punto por la longitud, s, del arco, contada desde un cierto punto fijo de la curva.

Dando a s un incremento, ds, se obtiene otro punto, P', de la curva, y será $OP' = \mathfrak{r} + d\mathfrak{r}$. Entonces es $PP' = d\mathfrak{r}$ y

$$\frac{d\mathfrak{r}}{ds} = \mathfrak{t}_1 \tag{14}$$

es un vector que tiene la misma dirección que la tangente a la curva en P, y como es $|d\mathfrak{r}| = ds$ será $\frac{|d\mathfrak{r}|}{ds} = |\mathfrak{t}_1| = 1$,

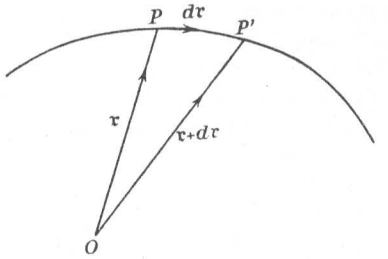

FIG. 9

es decir, el vector $\mathfrak{t}_1$ tiene el módulo unidad ; es pues, uno de los llamados vectores unidad.

De (14) se deduce :

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}. \tag{15}$$

Este vector está en el plano de dos tangentes sucesivas $\mathfrak{t}_1$ y $\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1$; por tanto, en el plano osculador de la línea, y como es $|\mathfrak{t}_1| = |\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1| = 1$, se diferencian $\mathfrak{t}_1$ y $\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1$ no en el valor, sino únicamente en la dirección, es decir, $d\mathfrak{t}_1$ es perpendicular a $\mathfrak{t}_1$ y está dirigido hacia el centro de curvatura de la línea. Si trasladamos el origen de

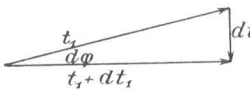

FIG. 10

$\mathfrak{t}_1 + d\mathfrak{t}_1$ hasta coincidir con el de $\mathfrak{t}_1$, vemos (fig. 10) que es :

$$|d\mathfrak{t}_1| = |\mathfrak{t}_1|\, d\varphi = d\varphi, \tag{16}$$

designando por $d\varphi$ el ángulo de contingencia, formado por dos tangentes o dos normales principales sucesivas. Designando el radio de curvatura de la línea por R, se tiene :

$$\frac{|d\mathfrak{t}_1|}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds} = \frac{\mathfrak{N}_1}{R}, \tag{17, 18}$$

siendo $\mathfrak{N}_1$ el vector unidad dirigido del punto de la curva al centro de curvatura correspondiente.

Velocidad y aceleración. Si consideramos la longitud del arco, s, como función del tiempo, t, la velocidad, $\mathfrak{v}$, del movimiento de un punto sobre la curva es :

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{t}_1 \cdot \frac{ds}{dt}. \tag{19}$$

La aceleración es

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{t}_1}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2}, \tag{20}$$

o bien, teniendo en cuenta la (18) :

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\mathfrak{N}_1}{R}|\mathfrak{v}|^2 + \mathfrak{t}_1 \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{21}$$

El vector aceleración se compone, pues, geométricamente, de dos sumandos, el primero de los cuales (aceleración normal) está dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria y tiene un valor $\frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$;

el segundo (aceleración tangencial) tiene la misma dirección de la trayectoria y su valor es igual al incremento del valor de la velocidad en la unidad de tiempo.

La ecuación (21) muestra que también existe aceleración cuando $|\mathfrak{v}| = \frac{ds}{dt}$ es constante y, en consecuencia, $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, y sólo varía la dirección de la velocidad.

4. Producto escalar

Se entiende por producto escalar de dos vectores, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, un escalar cuyo valor es el producto de los valores absolutos de los vectores, multiplicado por el coseno del ángulo que forman, es decir, $|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Lo designaremos, simplemente, por $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, de modo que será :

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}). \qquad (1)$$

De esta definición, en la que para nada se habla de sistema coordenado y sólo depende de la magnitud de los vectores y de la posición relativa de éstos, se deduce inmediatamente que el producto escalar de dos vectores es independiente del sistema de coordenadas.

Según la definición es :

(a) [1] $$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}), \qquad (2)$$

es decir, *el producto escalar goza de la propiedad conmutativa.*

El producto escalar de dos vectores es nulo,

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0, \qquad (3)$$

[1] Las letras entre paréntesis que preceden a las fórmulas se refieren al formulario colocado al final de la obra.

cuando es $\mathfrak{A} = 0$, ó $\mathfrak{B} = 0$, ó los dos vectores son perpendiculares entre sí.

Según la definición, el valor del producto escalar de un vector por él mismo es :

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}|^2. \qquad (4)$$

Representaremos abreviadamente este producto por la expresión $\mathfrak{A}^2$ que, en este caso, no puede inducir a confusión ; también prescindiremos de los paréntesis al representar el producto escalar, cuando parezcan innecesarios.

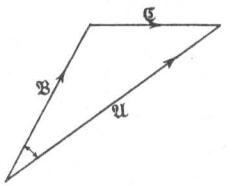

FIG. 11

Veamos ahora la expresión del producto escalar en función de las componentes rectangulares de los vectores.

Para ello, supongamos trasladados paralelamente a sí mismos los dos vectores, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, hasta que sus orígenes coincidan con el de coordenadas ; entonces los componentes según los ejes son las respectivas coordenadas de los extremos de los vectores.

Según el teorema del coseno (fig. 11) es :

$$|\mathfrak{A}|^2 + |\mathfrak{B}|^2 - 2\,|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{E}|^2, \qquad (5)$$

o según (1) :

$$2\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}|^2 + |\mathfrak{B}|^2 - |\mathfrak{E}|^2; \qquad (5')$$

pero, como se deduce de la inspección de la figura 11, es:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B} \qquad (6)$$

y, por consiguiente,

$$2\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}|^2 + |\mathfrak{B}|^2 - |\mathfrak{A} - \mathfrak{B}|^2, \qquad (7)$$

y como según (1, § 2) es :

$$|\mathfrak{A}|^2 = \mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2, \quad |\mathfrak{B}|^2 = \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_y^2 + \mathfrak{B}_z^2,$$
$$|\mathfrak{A} - \mathfrak{B}|^2 = (\mathfrak{A}_x - \mathfrak{B}_x)^2 + (\mathfrak{A}_y - \mathfrak{B}_y)^2 + (\mathfrak{A}_z - \mathfrak{B}_z)^2;$$

sustituyendo estos valores en (7) resulta:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z, \tag{8}$$

expresión que da la representación del producto escalar en función de sus componentes. El primer miembro indica por sí mismo la independencia respecto de los sistemas coordenados, cosa que para el segundo miembro hubiera habido que demostrar.

Se reconoce la certeza de la fórmula:

(b) $$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \tag{9}$$

del siguiente modo. Puesto que $|\mathfrak{B}| \cdot \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{B}_a$ es la proyección de $\mathfrak{B}$ sobre la dirección de $\mathfrak{A}$, es $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}| \cdot \mathfrak{B}_a$ igual al valor absoluto de $\mathfrak{A}$ multiplicado por la componente de $\mathfrak{B}$ en dirección de $\mathfrak{A}$; luego el segundo miembro de (9) puede también ser escrito así:

$$|\mathfrak{A}| \cdot \mathfrak{B}_a + |\mathfrak{A}| \cdot \mathfrak{C}_a = |\mathfrak{A}| (\mathfrak{B}_a + \mathfrak{C}_a) = |\mathfrak{A}| (\mathfrak{B} + \mathfrak{C})_a,$$

lo que es igual a $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$.

Analíticamente, esta ecuación resulta de un modo inmediato de la (8). De la misma manera se ve que es:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{D}); \tag{10}$$

por consiguiente, *el producto escalar disfruta de la ley distributiva.*

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son funciones de un parámetro t, será:

(i) $$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \left(\mathfrak{A}, \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}, \mathfrak{B}\right). \tag{11}$$

La demostración de (11) puede hacerse, por ejemplo, partiendo de la expresión en función de las componentes, pero puede deducirse independientemente de éstos, partiendo de la definición derivada (§ 3, (13)).

Designando por $\delta \mathfrak{s}$ la traslación infinitesimal que experimenta un punto material sobre el cual actúa la fuerza $\mathfrak{f}$, el trabajo realizado es:

$$\delta' A = (\mathfrak{f}, \delta \mathfrak{s}).$$

5. Producto vectorial

Se entiende por producto vectorial de dos vectores, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, un vector, $\mathfrak{C}$, cuya magnitud es el área del paralelogramo de los dos vectores y cuya dirección es perpendicular al plano del paralelogramo, siendo el sentido tal que un giro que lleva de $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$ describiendo el menor ángulo y un corrimiento en la dirección de $\mathfrak{C}$ compongan un movimiento helicoidal directo. Resulta, pues, que también en este caso se aplica la regla del sacacorchos y $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ forman un sistema directo.

Representaremos el producto vectorial por medio de un paréntesis cuadrado, en esta forma:

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]. \tag{1}$$

El módulo de $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ es el área del paralelogramo, luego:

$$|[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \operatorname{sen}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}). \tag{2}$$

De esta ecuación se deduce inmediatamente que

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = 0, \tag{3}$$

puesto que en este caso el ángulo comprendido es nulo. Recíprocamente, de

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0$$

se deduce que necesariamente es $\mathfrak{A} = 0$, ó $\mathfrak{B} = 0$, ó $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son paralelos.

De la definición se sigue :

$$(c) \qquad [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}], \qquad (4)$$

pues al permutar entre sí $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, la regla del sacacorchos da el sentido contrario. (El giro que lleva $\mathfrak{B}$ a coincidir con $\mathfrak{A}$ y una traslación correspondiente al movimiento helicoidal directo dan el sentido contrario que el giro que lleva $\mathfrak{A}$ a coincidir con $\mathfrak{B}$ y la traslación en el sentido del movimiento helicoidal directo.)

Por consiguiente, *en la multiplicación vectorial no se verifica la ley conmutativa.*

Se hubiera podido deducir la relación (3) de la (4), pues poniendo $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ en (4) resulta :

$$(e) \qquad [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = -[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = 0. \qquad (3')$$

Vamos ahora a determinar las componentes de $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ respecto de un sistema de ejes rectangulares ; designaremos estas componentes por $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_x$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_y$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_z$.

Para ello imaginemos trasladados los dos vectores $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ hasta que coincidan sus orígenes con el de coordenadas. El duplo del área del triángulo formado por los dos vectores $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es, entonces, $|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|$ sen $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Designando por $\mathfrak{f}$ el área del paralelogramo y por $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$ sus proyecciones sobre los planos *yz*, *zx*, *xy*, respectivamente, el teorema generalizado de PITÁGORAS da :

$$\mathfrak{f}^2 = \mathfrak{f}_x^2 + \mathfrak{f}_y^2 + \mathfrak{f}_z^2. \qquad (5)$$

Además se tiene :

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{f} \cos(n, x) ; \quad \mathfrak{f}_y = \mathfrak{f} \cos(n, y) ; \quad \mathfrak{f}_z = \mathfrak{f} \cos(n, z), \qquad (6)$$

siendo *n* la normal positiva (en el sentido de la regla del sacacorchos) al plano del paralelogramo de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

De las ecuaciones (5) y (6) se deduce :

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_x \cos(n, x) + \mathfrak{f}_y \cos(n, y) + \mathfrak{f}_z \cos(n, z), \qquad (7)$$

es decir, si consideramos $\mathfrak{f}$ como un vector que tiene la dirección de *n*, sus componentes son $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$. Por consiguiente, la proyección del paralelogramo $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ sobre el plano *yz* es, en magnitud, la componente sobre el eje *x* de $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$. La figura 12 representa la proyección del triángulo formado por $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre el plano *yz* ; el punto *P* tiene las coordenadas $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, y el *Q* las $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$.

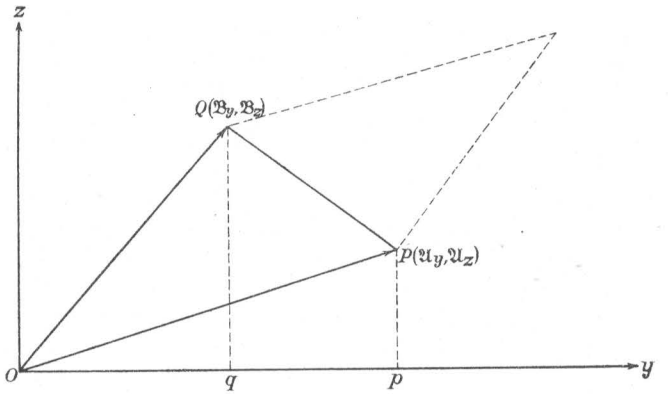

FIG. 12

Observando ahora que es

$$2\triangle OPQ = 2\triangle OqQ + 2 \text{ trapecio } qpPQ - 2\triangle OpP,$$

igual, por tanto, a

$$\mathfrak{B}_y\,\mathfrak{B}_z + (\mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z)\,(\mathfrak{A}_y - \mathfrak{B}_y) - \mathfrak{A}_y\,\mathfrak{A}_z,$$

resulta:

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y\,\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\,\mathfrak{B}_y$$

y, de la misma manera:

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_y = \mathfrak{A}_z\,\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\,\mathfrak{B}_z\,; \quad [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_z = \mathfrak{A}_x\,\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\,\mathfrak{B}_x. \quad (8)$$

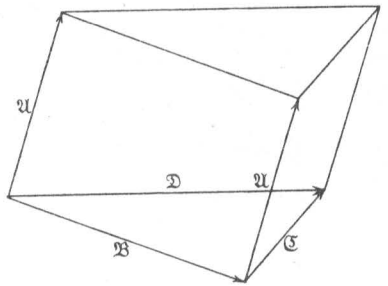

FIG. 13

De estos valores de las componentes se deduce la *ley distributiva*:

$$\text{(d)} \qquad [\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}], \qquad (9)$$

$$[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C} + \mathfrak{D}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] + [\mathfrak{A}, \mathfrak{D}] + [\mathfrak{B}, \mathfrak{D}]. \quad (10)$$

La fórmula (9) puede demostrarse geométricamente del siguiente modo. La proyección del paralelogramo de los vectores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (fig. 13) sobre un plano perpendicular a una dirección cualquiera n es $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_n$; de la misma manera, la proyección del paralelogramo de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{C}$ sobre aquel plano vale $[\mathfrak{A}, \mathfrak{C}]_n$; pero la suma de ambas proyecciones es igual a la proyección sobre el mismo plano del paralelogramo formado por $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{D}$, es decir:

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_n + [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}]_n = [\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]_n,$$

y teniendo en cuenta que es $\mathfrak{D} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ y que n es una dirección arbitraria, resulta la ecuación (9).

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son funciones de un parámetro, t, por ejemplo el tiempo, será:

$$\text{(k)} \qquad \frac{d}{dt}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}, \mathfrak{B}\right] + \left[\mathfrak{A}, \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right], \qquad (11)$$

fórmula en la que es de notar la conservación en cada uno de sus términos del orden de sucesión de los vectores.

La demostración resulta de las expresiones (8) de las componentes, pero puede hacerse independientemente, partiendo de la definición de derivada (§ 3, (13)).

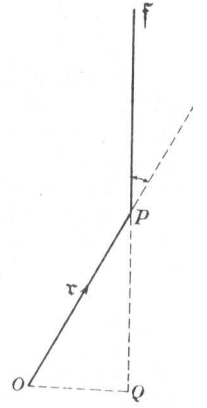

FIG. 14

Momento de una fuerza respecto de un punto. Consideremos un cuerpo que puede girar alrededor de un punto O (fig. 14). Si en el punto P del cuerpo actúa una fuerza $\mathfrak{f}$, el momento, $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{f}$ respecto de O puede determinarse del siguiente modo: El eje de rotación está dirigido perpendicularmente al plano que contiene $\mathfrak{r} = OP$ y $\mathfrak{f}$; y su magnitud es el producto de $\mathfrak{f}$ por la distancia OQ del punto O a $\mathfrak{f}$. Podemos considerar la distancia del punto, P, de aplicación de la fuerza al centro de rotación O como un vector determinado en magnitud, dirección y sentido por OP; entonces, es:

$$OQ = |\mathfrak{r}| \operatorname{sen} (\mathfrak{r}, \mathfrak{f})\,; \quad \text{luego} \quad |\mathfrak{N}| = |\mathfrak{r}| \cdot |\mathfrak{f}| \operatorname{sen} (\mathfrak{r}, \mathfrak{f}).$$

Considerando el momento como un vector cuyo módulo es la magnitud del momento y cuya dirección es la del eje de giro, será:

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{f}]. \qquad (12)$$

Hemos escogido, pues, el sentido positivo de $\mathfrak{N}$ de tal manera que la rotación alrededor del eje que pasa por O, debida a $\mathfrak{N}$, y un corrimiento en la dirección de $\mathfrak{N}$ constituyen un movimiento helicoidal directo.

Tomemos como origen de coordenadas el punto O y designemos por x, y, z las coordenadas del punto P; las componentes de $\mathfrak{N}$ tienen entonces las expresiones siguientes, según lo dicho antes (8):

$$\mathfrak{N}_x = y\mathfrak{f}_z - z\mathfrak{f}_y, \quad \mathfrak{N}_y = z\mathfrak{f}_x - x\mathfrak{f}_z, \quad \mathfrak{N}_z = x\mathfrak{f}_y - y\mathfrak{f}_x. \tag{13}$$

La segunda ley de Keplero. Si sobre un punto material, m, actúa una fuerza, $\mathfrak{f}$, dirigida hacia un centro fijo, O, el área descrita por el radio vector (segmento de unión de O con m) en la unidad de tiempo es constante en magnitud y sentido.

Demostración. Según las ecuaciones del movimiento, de NEWTON, es

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f}; \tag{14}$$

designando por $\mathfrak{r}$ el radio vector que va de O a m, se expresa que la fuerza $\mathfrak{f}$ es central, y, por tanto, que su dirección coincide con la de $\mathfrak{r}$, por la ecuación

$$\mathfrak{f} = K \cdot \mathfrak{r}, \tag{15}$$

donde K es una función escalar.

Ahora bien: de la inspección de la figura 9 se deduce:

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{r} + d\mathfrak{r} - \mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}; \quad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}, \tag{16}$$

luego, según (14), es:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = K \cdot \mathfrak{r}. \tag{17}$$

Multiplicando vectorialmente esta ecuación por $\mathfrak{r}$ y teniendo en cuenta la primera ecuación (e), resulta:

$$\left[\mathfrak{r}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] = 0. \tag{18}$$

Pero, según (k), es:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \left[\mathfrak{r}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right],$$

luego (e):

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \left[\mathfrak{r}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right], \tag{19}$$

y teniendo presente (18):

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = 0, \tag{20}$$

es decir,

$$\frac{1}{2}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \text{const.} \tag{21}$$

El área descrita por el radio vector en el tiempo dt es (e) $\frac{1}{2}\left|[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}+d\mathfrak{r}]\right| = \frac{1}{2}\left|[\mathfrak{r}, d\mathfrak{r}]\right|$; por consiguiente, la ecuación (21) expresa que el área descrita en la unidad de tiempo es constante en magnitud y sentido.

Nota. Algunos autores utilizan la notación $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ en lugar de la $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$.

6. Algunas relaciones entre productos escalares y productos vectoriales

1.° Veamos la significación de $(\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}\ \mathfrak{C}])$.

$|[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]|$ es el área del paralelogramo formado con los vectores $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$; pero como

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{D}| \cos (\mathfrak{A}, \mathfrak{D})$$

puede considerarse como producto de $|\mathfrak{D}|$ por la proyección de $\mathfrak{A}$ sobre la dirección de $\mathfrak{D}$, la magnitud estu-

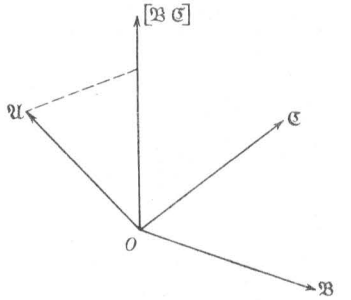

FIG. 15

diada $(\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}])$ es el producto del paralelogramo $|[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]|$ por la proyección de $\mathfrak{A}$ sobre la dirección de $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$, es decir, la dirección perpendicular al plano de los vectores $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ (fig. 15), luego este producto representa el volumen del paralelepípedo de aristas $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; pues la proyección de $\mathfrak{A}$ sobre una dirección perpendicular al plano de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ es la altura del paralelepípedo.

Este volumen se cuenta como positivo o negativo según que $\mathfrak{A}$ forme con $[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ un ángulo agudo u obtuso. El volumen es positivo si $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, o, lo que es lo mismo, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ forman un sistema directo.

Hemos tomado como base del paralelepípedo el paralelogramo de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ y como altura la proyección de $\mathfrak{A}$; pero lo mismo podríamos tomar como base el paralelogramo de dos cualesquiera de los tres vectores y el tercero para deducir de él la altura por proyección sobre una recta perpendicular al plano de la base. Observemos, sin embargo, que si $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ forman un sistema directo, los vectores han de tomarse en tal orden que su sistema sea también directo. Como fácilmente se ve en la figura, esto es lo que sucede cuando se permutan circularmente los vectores; se tiene, por consiguiente,

$$\text{(f)} \qquad (\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]) = (\mathfrak{B}, [\mathfrak{C}, \mathfrak{A}]) = (\mathfrak{C}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]), \qquad (1)$$

pero

$$(\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]) = -(\mathfrak{B}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}]) \qquad (2)$$

De (1) se deduce inmediatamente:

$$\text{(g)} \qquad (\mathfrak{A}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]) = 0, \qquad (3)$$

pues según (1) y (e) es:

$$(\mathfrak{A}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]) = (\mathfrak{B}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]) = 0. \qquad (4)$$

Geométricamente puede verse esto sin necesidad de cálculo alguno, pues $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ es un vector perpendicular al $\mathfrak{A}$ y, por consiguiente, el producto escalar de $\mathfrak{A}$ y este vector, perpendicular al $\mathfrak{A}$, debe ser nulo (§ 4, (3)).

Si $\mathfrak{A}$ está en el plano de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, se tiene:

$$(\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}] = 0, \qquad (5)$$

como se deduce, en primer término, de la significación del producto como volumen, y puede verse también del siguiente modo:

Según lo dicho en § 3 (9), se verifica entonces la relación

$$a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} = 0,$$

o bien,

$$\mathfrak{A} = -\frac{b}{a}\mathfrak{B} - \frac{c}{a}\mathfrak{C};$$

sustituyendo este valor en la expresión de $(\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}])$ se obtiene, recordando (3),

$$\left(\left(-\frac{b}{a}\mathfrak{B} - \frac{c}{a}\mathfrak{C}\right), [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\right)$$

$$= -\frac{b}{a}\left(\mathfrak{B}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\right) - \frac{c}{a}\left(\mathfrak{C}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\right) = 0.$$

2.° Vamos ahora a transformar $\mathfrak{E} = \left[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\right]$. Se ve, en primer término, que $\mathfrak{E}$ está en el plano de $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ (que suponemos es el plano del dibujo), pues $\mathfrak{D} = [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]$ es perpendicular a este plano y $[\mathfrak{A}, \mathfrak{D}]$ es perpendicular a $\mathfrak{D}$ y, por tanto, está en el plano del dibujo (figura 16).

Descompongamos $\mathfrak{A}$ en sus dos componentes $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{N}$ respectivamente paralela y normal al plano del dibujo, de tal modo, pues, que es:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{H} + \mathfrak{N}; \tag{6}$$

entonces, es $\mathfrak{E}$ perpendicular a $\mathfrak{H}$. Descompongamos, a su vez, $\mathfrak{H}$ en dos vectores, $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{c}$, perpendiculares a $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$ siendo, por tanto,

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}. \tag{7}$$

Si designamos por $\mathfrak{B}_1$ el vector unidad en dirección de $\mathfrak{B}$, se tiene:

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{D}] = \left[\mathfrak{b}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\right] = \mathfrak{B}_1 |\mathfrak{b}| \cdot |\mathfrak{D}| = \mathfrak{B}_1 |\mathfrak{b}| \cdot \mathfrak{B}| \cdot |\mathfrak{C}| \cdot \text{sen } (\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$$
$$= \mathfrak{B} |\mathfrak{b}| \cdot |\mathfrak{C}| \cos (\mathfrak{b}, \mathfrak{C}) = \mathfrak{B} (\mathfrak{b}, \mathfrak{C}) = \mathfrak{B} (\mathfrak{H}, \mathfrak{C}), \tag{8}$$

puesto que es $\mathfrak{H} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ y $(\mathfrak{c}, \mathfrak{C}) = 0$.

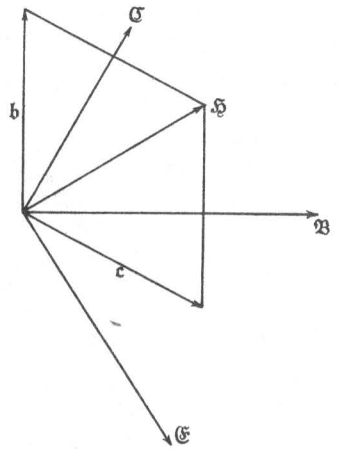

FIG. 16

Además, como $(\mathfrak{N}, \mathfrak{C}) = 0$, teniendo en cuenta (6) podemos escribir $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ en lugar de $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C})$; luego, finalmente, será:

$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{D}] = \mathfrak{B} (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}).$$

De la misma manera se encuentra $[\mathfrak{c}, \mathfrak{D}] = -\mathfrak{C} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, y sumando estas dos igualdades, resulta:

$$[\mathfrak{H}, \mathfrak{D}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{D}],$$

con lo cual tenemos:

(h) $$\left[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\right] = \mathfrak{B} (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) - \mathfrak{C} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}). \tag{9}$$

3.° Vamos a descomponer, ahora, el vector $\mathfrak{A}$ en dos componentes, uno paralelo y otro perpendicular al vector unidad $\mathfrak{s}_1$.

Para ello, ponemos en (9) $\mathfrak{s}_1$ en lugar de $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{A}$ en el de $\mathfrak{B}$, y $\mathfrak{s}_1$ en el de $\mathfrak{C}$, y obtenemos:

$$\left[\mathfrak{s}_1\,[\mathfrak{A},\,\mathfrak{s}_1]\right] = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{s}_1,\,\mathfrak{s}_1) - \mathfrak{s}_1\,(\mathfrak{s}_1,\,\mathfrak{A}), \tag{10}$$

o bien, por ser $(\mathfrak{s}_1,\,\mathfrak{s}_1) = 1$:

$$(h_1) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{s}_1\,(\mathfrak{s}_1,\,\mathfrak{A}) + \left[\mathfrak{s}_1\,[\mathfrak{A},\,\mathfrak{s}_1]\right]; \tag{11}$$

el primer término del segundo miembro es paralelo a $\mathfrak{s}_1$ y el segundo perpendicular al mismo.

4.° Como ejercicio, indicaremos algunas otras relaciones entre cuatro vectores, útiles en las aplicaciones. Se tiene:

$$(h_2) \qquad \begin{aligned}([\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]) &= \left(\mathfrak{A},\,\left[\mathfrak{B},\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]\right]\right)\\ &= (\mathfrak{A},\,\mathfrak{C})\cdot(\mathfrak{B},\,\mathfrak{D}) - (\mathfrak{A},\,\mathfrak{D})\cdot(\mathfrak{B},\,\mathfrak{C}).\end{aligned} \tag{12}$$

La segunda parte de esta expresión se deduce multiplicando por $\mathfrak{A}$ la igualdad

$$\left[\mathfrak{B},\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]\right] = \mathfrak{C}\,(\mathfrak{B},\,\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}\,(\mathfrak{B},\,\mathfrak{C}), \tag{13}$$

cierta según (9), y teniendo presente (f) resulta también la primera parte.

Si los planos $\mathfrak{AB}$ y $\mathfrak{CD}$ son perpendiculares entre sí, es $([\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]) = 0$.

Para obtener una nueva relación, sustituyamos en (13) $\mathfrak{B}$ por $[\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}]$; resulta entonces:

$$\left[[\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]\right] = \mathfrak{C}\,([\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}\,([\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}]\,\mathfrak{C}). \tag{14}$$

Sustituyendo en esta ecuación $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ en lugar de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, respectivamente, el primer miembro se convierte, según (c), en el valor negativo del vector considerado, de modo que será:

$$\left[[\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]\right] = \mathfrak{B}\,([\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}],\,\mathfrak{A}) - \mathfrak{A}\,([\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}],\,\mathfrak{B}). \tag{15}$$

Reuniendo estos resultados podremos, pues, escribir:

$$(h_3) \qquad \begin{aligned}\left[[\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]\right] &= \mathfrak{C}\,([\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,\mathfrak{D}) - \mathfrak{D}\,([\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,\mathfrak{C}\\ &= \mathfrak{B}\,([\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}],\,\mathfrak{A}) - \mathfrak{A}\,([\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}],\,\mathfrak{B}).\end{aligned} \tag{16}$$

Este vector está en la recta de intersección de los planos $\mathfrak{AB}$ y $\mathfrak{CD}$. En el caso de estar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ en un plano, el vector es nulo.

Como caso particular, se deduce de (g) y (f):

$$\left[[\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}],\,[\mathfrak{A},\,\mathfrak{C}]\right] = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{A},\,[\mathfrak{B},\,\mathfrak{C}]). \tag{17}$$

Multiplicando vectorialmente $\mathfrak{A}$ por (13), resulta:

$$\left[\mathfrak{A},\,\left[\mathfrak{B},\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{D}]\right]\right] = [\mathfrak{A},\,\mathfrak{C}]\,(\mathfrak{B},\,\mathfrak{D}) - [\mathfrak{A},\,\mathfrak{D}]\,(\mathfrak{B},\,\mathfrak{C}). \tag{18}$$

Este vector es perpendicular a $\mathfrak{A}$ y está en el plano perpendicular al $\mathfrak{CD}$ que pasa por $\mathfrak{B}$.

Si es $\mathfrak{D} = \mathfrak{A}$, la fórmula se simplifica, convirtiéndose en esta otra:

$$\left[\mathfrak{A},\,\left[\mathfrak{B},\,[\mathfrak{C},\,\mathfrak{A}]\right]\right] = [\mathfrak{A},\,\mathfrak{C}]\,(\mathfrak{A},\,\mathfrak{B}). \tag{19}$$

7. Movimiento de un electrón en un campo magnético constante

Según la ley de Biot-Savart, la fuerza que actúa sobre el elemento infinitamente pequeño *ds* de un circuito de corriente de intensidad *i* (en unidades electromagnéticas) en el campo magnético $\mathfrak{H}$ es:

$$[ids,\,\mathfrak{H}],$$

donde $\mathfrak{i}$ representa un vector que indica en dirección y magnitud la intensidad de la corriente en el punto considerado.

Designemos por q la sección del alambre; el elemento de volumen será qds y la fuerza que actúa por unidad de volumen

$$\mathfrak{f} = \left[\frac{\mathfrak{i}}{q}, \mathfrak{H}\right],$$

siendo $\frac{\mathfrak{i}}{q}$ la cantidad de electricidad que en la unidad de tiempo pasa por la unidad de sección, esto es, el llamado flujo $\mathfrak{Z}$.

Esta ley es válida cuando se trata de un cuerpo cargado con una densidad ϱ (en unidades electromagnéticas) y que se mueve con la velocidad $\mathfrak{v}$, es decir, cuando se sustituye la corriente de conducción por la de convección.

Pero, en la unidad de tiempo, pasa por la unidad de superficie normal a la velocidad $\mathfrak{v}$ el volumen $|\mathfrak{v}|$ y, por consiguiente, la cantidad de electricidad $\varrho|\mathfrak{v}|$; luego

$$\mathfrak{f} = [\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]$$

es la fuerza que actúa sobre el volumen unidad; sobre todo el cuerpo actuará, según esto, la fuerza

$$\mathfrak{F} = \int [\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]\, dS = \int \varrho\, [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]\, dS,$$

designando por dS un elemento de volumen. Admitiremos que las dimensiones del cuerpo son pequeñas y que se mueve sin rotación apreciable, es decir, que puede considerarse como un punto material en el sentido mecánico de la locución.

Puesto que el cuerpo se mueve como un sólido sin rotación, $\mathfrak{v}$ es constante en todo el cuerpo, y como también lo es $\mathfrak{H}$, podemos escribir:

$$\mathfrak{F} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] \int \varrho\, dS = e\, [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}], \tag{1}$$

representando por e la carga total del cuerpo.

Si m es la masa del cuerpo, las ecuaciones de NEWTON del movimiento serán:

$$m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F} = e\, [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]. \tag{2}$$

Una integral se obtiene multiplicando escalarmente (2) por el vector $\mathfrak{v}$, con lo cual resulta:

$$m\left(\mathfrak{v}, \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = e\, (\mathfrak{v}, [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]), \tag{3}$$

de donde, teniendo en cuenta (g), se deduce:

$$\left(\mathfrak{v}, \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathfrak{v}^2 = 0, \tag{4}$$

o bien:

$$\mathfrak{v}^2 = C_1\,. \tag{5}$$

C_1 es una constante de integración. La ecuación (5) es la integral de la fuerza viva.

Esta permanece constante: y, en efecto, la fuerza $\mathfrak{F}$ no realiza ningún trabajo, puesto que, como demuestra (1), actúa siempre perpendicularmente a la velocidad considerada, $\mathfrak{v}$.

Se llega a otra integral multiplicando escalarmente la ecuación (2) por $\mathfrak{H}$; se obtiene entonces, teniendo en cuenta la (g):

$$\left(\mathfrak{H}, \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\mathfrak{v}, \mathfrak{H}) = 0, \tag{6}$$

y, por tanto,

$$(\mathfrak{H}, \mathfrak{v}) = C_2, \tag{7}$$

siendo también C_2 una constante de integración.

Esta última ecuación (7) demuestra que es constante $|\mathfrak{H}| \cdot |\mathfrak{v}| \cos(\mathfrak{H}, \mathfrak{v})$; pero como por hipótesis lo es $|\mathfrak{H}|$ y, según (5), lo es también $|\mathfrak{v}|$, la expresión (7) demuestra la constancia del ángulo formado por $\mathfrak{v}$ y $\mathfrak{H}$.

Apreciaremos inmediatamente el carácter total del movimiento en cuanto determinemos la curvatura de la trayectoria.

Según § 3 (18), la curvatura es:

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right|. \tag{8}$$

Como $|\mathfrak{v}| = \frac{ds}{dt}$ es constante (5), se puede escribir la igualdad (8) en la forma

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right| \frac{1}{\mathfrak{v}^2}; \tag{9}$$

ahora bien, según (16), § 5, es:

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \tag{10}$$

luego, teniendo en cuenta (2):

$$\frac{1}{R} = \frac{e}{m} \frac{|[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]|}{\mathfrak{v}^2} = \frac{e\,|\mathfrak{H}|}{m\,|\mathfrak{v}|} \operatorname{sen}(\mathfrak{v}, \mathfrak{H}). \tag{11}$$

Resulta, pues, que la curvatura es constante, constante también la componente de la velocidad en dirección de $\mathfrak{H}$, como se sigue de (5) y (7), y asimismo constante el ángulo de las direcciones de la trayectoria y del campo; por consiguiente, el punto describe una hélice cuyo eje tiene la dirección del campo. Si la velocidad inicial en dirección del campo es nula, se conservará siempre nula y el punto describirá una circunferencia de radio

$$r = \frac{m\,|\mathfrak{v}|}{e\,|\mathfrak{H}|}, \tag{12}$$

como se deduce de (11) para el caso de ser perpendiculares $\mathfrak{v}$ y $\mathfrak{H}$.

CAPÍTULO II

Las operaciones diferenciales del análisis vectorial

1. El gradiente

Consideremos un escalar dado U, función del lugar, continua y derivable, por ejemplo, la temperatura de un cuerpo; lo representaremos geométricamente en la forma explicada circunstanciadamente en el Capítulo I, § 1, por un sistema de superficies de nivel.

Definamos un vector que en cada punto de la porción de espacio considerada tenga la dirección del crecimiento más rápido de U, y cuyo valor absoluto sea igual al crecimiento de U cuando se recorre en esta dirección una magnitud igual a la unidad de longitud (supuesta infinitamente pequeña).

Este vector es independiente de todo sistema de coordenadas, puesto que ninguno ha sido utilizado en su definición, y depende exclusivamente de la distribución del escalar U en el espacio.

Llamaremos a este vector, $\mathfrak{G}$, *gradiente* de U y lo representaremos así:

$$\mathfrak{G} = \text{grad } U.$$

Veamos ahora cuáles son los componentes del gradiente en un sistema de coordenadas rectangulares.

Desde luego se ve (fig. 1) que la dirección de $\mathfrak{G}$ es normal a las superficies de nivel $U = \text{const.}$, puesto que es la dirección que debe corresponder al crecimiento más rápido de U, cuando se recorre la unidad infinitamente pequeña de longitud, y, por tanto, debe ser la del camino más corto para ir de un punto de una superficie de nivel a la contigua, y este camino está dado por la normal.

Designemos su dirección para valores crecientes de U por n e imaginemos un origen fijo de distancias en n; podremos entonces considerar U como función dada de n. La dirección de $\mathfrak{G}$ coincide en este caso con n y se tiene:

$$|\mathfrak{G}| = \frac{\partial U}{\partial n}. \tag{1}$$

Los cosenos directores de las normales a las superficies $U(x, y, z) = \text{const.}$ y, por tanto, de la dirección de $\mathfrak{G}$ son, como es sabido por Geometría analítica,

$$\cos(n, x) = \frac{\partial U/\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos(n, y) = \frac{\partial U/\partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}, \tag{2}$$

$$\cos(n, z) = \frac{\partial U/\partial z}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}.$$

Considerando, por otra parte, las proyecciones de dn sobre los ejes coordenados, se obtiene:

$$\cos(n, x) = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cos(n, y) = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \cos(n, z) = \frac{\partial z}{\partial n}, \tag{3}$$

y multiplicando miembro a miembro las ecuaciones correspondientes (2) y (3), resulta:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial n}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}=1, \tag{4}$$

o bien,

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \tag{4'}$$

En cuanto a las componentes de $\mathfrak{G}$ se deducen de las igualdades:

$$\mathfrak{G}_x = |\mathfrak{G}| \cos(n, x)$$

o, utilizando (1), (2) y (4'),

$$\mathfrak{G}_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{G}_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{5}$$

Como las direcciones de los ejes de coordenadas son arbitrarias, se tiene de un modo general:

$$\mathfrak{G}_l = \frac{\partial U}{\partial l}, \tag{6}$$

donde l indica una dirección cualquiera. Esto se denota también escribiendo:

$$\operatorname{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial l}, \tag{6'}$$

La igualdad (6) justifica la denominación de *derivada de U en la dirección l* dada a $\frac{\partial U}{\partial l}$.

Siguiendo a LAMÉ, la expresión

$$|\mathfrak{G}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

se llama primer parámetro diferencial de U.

Si la dirección l forma un ángulo ψ con la n, la proyección de $\mathfrak{G}$ sobre l es igual a $|\mathfrak{G}| \cos \psi$; vemos, pues, que la velocidad de variación de U en un punto es constante en un cono de revolución cuyo eje es la normal a la superficie $U = \text{const}$. Si es $\psi = \frac{\pi}{2}$, la proyección es nula, es decir, el gradiente no tiene componente tangencial a la superficie de nivel, cosa que, por otra parte, se deduce inmediatamente de la definición de superficies de nivel, puesto que en ellas no varía el valor de U.

Es de gran importancia la *integral curvilínea* de $\mathfrak{G}$ a lo largo de una curva que va de un punto origen dado, s_0, a un extremo, también dado, s_1:

$$\int_{s_0}^{s_1} (\mathfrak{G}, d\bar{s}),$$

en cuya expresión $(\mathfrak{G}, d\bar{s})$ denota, como siempre, el producto escalar de $\mathfrak{G}$ y el vector infinitamente pequeño $d\bar{s}$. Pero este producto se obtiene proyectando $\mathfrak{G}$ sobre la dirección $d\bar{s}$ y multiplicando por el valor absoluto $|d\bar{s}|$; será, pues,

$$\int_{s_0}^{s_1} (\mathfrak{G}, d\bar{s}) = \int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{G}_s \, |d\bar{s}| = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial U}{\partial s} \, ds, \tag{7}$$

donde con ds se indica el valor absoluto de $d\bar{s}$. En el segundo miembro de esta igualdad figura una diferencial exacta y tendremos:

$$\int_{s_0}^{s_1}(\text{grad } U, d\bar{s}) = \int_{s_0}^{s_1}(\mathfrak{G}, d\bar{s}) = U_1 - U_0, \qquad (8)$$

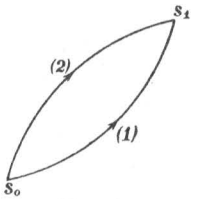

FIG. 17

indicando con los índices 0 y 1 que los valores de U deben ser tomados en los puntos s_0 y s_1, respectivamente. Vemos, pues, que el resultado de la integración no depende de la trayectoria de integración, sino solamente de los puntos inicial y final, y, por tanto, se tiene:

$$(1)\int_{s_0}^{s_1}(\text{grad } U, d\bar{s}) = (2)\int_{s_0}^{s_1}(\text{grad } U, d\bar{s}), \qquad (9)$$

denotando con (1) y (2) en los signos de integral las dos trayectorias designadas con las mismas notaciones en la figura 17.

Invirtiendo los límites en la segunda integral, cambia el signo de ésta y tendremos:

$$(1)\int_{s_0}^{s_1}(\text{grad } U, d\bar{s}) + (2)\int_{s_0}^{s_1}(\text{grad } U, d\bar{s}) = \oint(\text{grad } U, d\bar{s}) = 0, \qquad (9')$$

en cuya expresión el signo $\circlearrowleft$ indica que la integración se hace a lo largo de un contorno cerrado.

Por ejemplo, si es $\mathfrak{G} = \text{grad } U$ una fuerza que obra sobre un punto material, cuando éste se traslada de s_0 a s_1 realiza un trabajo:

$$A = U_1 - U_0. \qquad (10)$$

En este caso, U recibe el nombre de función de fuerzas, y $-U$ es el potencial de la fuerza $\mathfrak{G}$. La ecuación (8) expresa que el trabajo realizado durante la traslación es igual al incremento de la función de fuerzas, o también, a la caída de potencial, independientemente del camino recorrido en la traslación.

La ecuación (9′) expresa que el trabajo realizado por las fuerzas cuando el punto vuelve a su posición primitiva es nulo. No puede, pues, haber pérdidas de energía en la traslación, y el sistema es, en sentido energético, un sistema conservativo.

Cuando un vector $\mathfrak{G}$ puede considerarse como gradiente de un escalar, se dice que $\mathfrak{G}$ es un vector potencial.

Teorema 1.° Si $\mathfrak{G}$ es un vector potencial, es decir, si puede darse una función U tal que sea $\mathfrak{G} = \text{grad } U$, las líneas $\mathfrak{G}$ no pueden ser cerradas, sino que tienen que tener un origen y un extremo.

Pues si hubiera una línea $\mathfrak{G}$ cerrada, podríamos tomarla como curva s, y la integral a lo largo de ella sólo podría contener elementos positivos, puesto que $\mathfrak{G}$ siempre está en la dirección de ds, y, por tanto, la integral a lo largo de s no podría ser nula como, según (9′), debe ser.

Teorema 2.° Si la integral de $\mathfrak{G}$ a lo largo de la línea s es independiente de ésta, o, lo que es lo mismo, si la integral a lo largo de un contorno cerrado es nula, existe un escalar U tal que es:

$$\mathfrak{G} = \text{grad } U.$$

Esta propiedad es la recíproca de la expresada por la igualdad (9′).

Para dar un ejemplo físico concreto, supongamos que $\mathfrak{G}$ es una fuerza; el teorema anterior dirá en este caso:

Si el trabajo realizado en el movimiento de un punto material depende de las posiciones inicial y final, pero

no del camino recorrido, o lo que es lo mismo, si el trabajo realizado en el movimiento cuando el camino recorrido es cerrado es nulo, las fuerzas $\mathfrak{G}$ tienen una función de fuerzas U.

Demostración. Partamos de un punto fijo s_0 y construyamos la integral $\int_{s_0}^{s_1}(\mathfrak{G}, d\bar{s})$; ésta dependerá exclusivamente del punto s_1, una vez supuesto fijo s_0, y será:

$$\int_{s_0}^{s_1}(\mathfrak{G}, d\bar{s}) = U(s_1). \tag{11}$$

Tomemos ahora otro punto s_1' infinitamente próximo al s_1, y sea:

$$\int_{s_0}^{s_1'}(\mathfrak{G}, d\bar{s}) = U(s_1'). \tag{12}$$

Puesto que la trayectoria de integración es arbitraria, podemos hacer que en (12) pase por s_1 y entonces la diferencia de (12) y (11) da:

$$\int_{s_1}^{s_1'}(\mathfrak{G}, d\bar{s}) = U(s_1') - U(s_1). \tag{13}$$

Pero como s_1 y s_1' son puntos infinitamente próximos, se puede prescindir en el primer miembro del signo integral y escribir, en lugar del segundo miembro, $\mathfrak{G}_s ds$, siendo $ds = |d\bar{s}|$. El primer miembro es entonces el incremento, también infinitamente pequeño, de U, dU, y considerando U como función de s, será:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial s} ds, \text{ luego } \mathfrak{G}_s = \frac{\partial U}{\partial s}, \text{ o bien } \mathfrak{G} = \text{grad } U. \tag{14}$$

Naturalmente, el valor de U está dado aquí, salvo una constante, porque sólo importan las derivadas.

Energía potencial. Sea $\mathfrak{F}$ un vector potencial, por tanto, $\mathfrak{F} = \text{grad } U$, que representa una fuerza independiente del tiempo, que actúa sobre un punto material de masa m, animado de una velocidad $\mathfrak{v}$. La ecuación del movimiento, de NEWTON, será:

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F}. \tag{15}$$

Multiplicando escalarmente (15) por $\mathfrak{v} = \frac{d\bar{s}}{dt}$ resulta:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2\right) = \left(\mathfrak{F}, \frac{d\bar{s}}{dt}\right) = \mathfrak{F}_s \frac{ds}{dt} = \frac{\partial U}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{dU}{dt}, \tag{16}$$

y poniendo $U = -V$ tendremos:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2 + V\right\} = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{m}{2}\mathfrak{v}^2 + V = h, \tag{17}$$

donde h es una constante independiente del tiempo.

El producto $\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2$ es la *energía cinética* del punto material; V recibe el nombre de *energía potencial*, y la ecuación (17) se llama la « integral de la fuerza viva ».

En lugar de la notación *grad* se usa frecuentemente el signo ∇, introducido por HAMILTON.

2. La divergencia y el teorema de la integral de Gauss

Consideremos un vector, $\mathfrak{A}$, continuo y derivable respecto de su punto de aplicación, dado en el espacio S, limitado por una superficie cerrada, σ.

Designando por n la normal exterior de σ, la integral $\int \mathfrak{A}_n d\sigma$ recibe el nombre de integral de superficie de $\mathfrak{A}$ extendida a σ, o sobre σ.

El valor límite del cociente de dividir esta integral de superficie por el volumen del espacio S, cuando este espacio tiende a reducirse a un punto, se llama *divergencia* de $\mathfrak{A}$ y se representa por la notación: div $\mathfrak{A}$; está, pues, definida por la ecuación:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \lim_{S=0} \frac{\int \mathfrak{A}_n \, d\sigma}{\int dS} \qquad (1)$$

De esta definición se sigue *que div $\mathfrak{A}$ representa el valor de la integral de superficie cuando el volumen que ésta encierra es la unidad supuesta infinitamente pequeña* y también que es una magnitud escalar independiente del sistema de coordenadas.

Partiendo de este concepto vamos a deducir el teorema de la integral de GAUSS.

Dividamos el espacio S por medio de infinitas superficies cualesquiera en elementos infinitamente pequeños de espacio, dS (fig. 18). Aplicando a cada uno de ellos la ecuación (1) y sumando todos los resultados así obtenidos, todos los términos $\mathfrak{A}_n \, d\sigma$ del segundo miembro que corresponden a elementos que tienen común la s perficie de separación se anulan, puesto que n representa siempre la normal exterior, la cual tiene sentidos opuestos para la superficie de separación de dos

elementos de volumen contiguos; por consiguiente, sólo quedarán en el segundo miembro los términos $\mathfrak{A}_n \, d\sigma$ que proceden de la superficie σ que limita el volumen S, porque solamente se integra una vez sobre esta superficie. Como en el primer miembro de la ecuación suma resulta directamente la $\int \operatorname{div} \mathfrak{A} \, dS$, tendremos así:

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{A} \, dS = \int \mathfrak{A}_n \, d\sigma, \qquad (2)$$

igualdad que expresa el teorema de la integral de GAUSS,

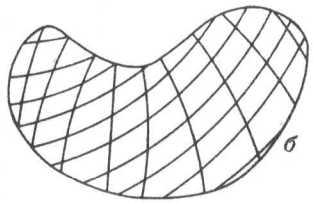

FIG. 18

que transforma una integral de volumen en una de superficie.

De (1) se sigue:

$$\operatorname{div} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{div} \mathfrak{B}. \qquad (3)$$

Según la forma que tenga dS, por estar el elemento de volumen referido a coordenadas cartesianas rectangulares, a polares o a cilíndricas, la ecuación (1) da diversas expresiones correspondientes al sistema de coordenadas respectivo, como más adelante veremos más circunstanciadamente. Como caso el más sencillo, vamos a determinar el valor de div $\mathfrak{A}$ en coordenadas cartesianas.

Para ello tomamos como elemento de volumen un paralelepípedo infinitamente pequeño, cuyas aristas,

dx, dy, dz, son paralelas a los ejes coordenados (fig. 19), y será :

$$dS = dx \cdot dy \cdot dz. \tag{4}$$

La integral de superficie consta entonces de seis términos, correspondientes a las seis caras del paralelepípedo. La normal exterior en la cara de la derecha es $+ x$ y en la cara de la izquierda $- x$, luego el valor

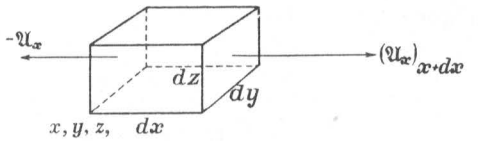

FIG. 19

del término debido a la cara de la izquierda (que tiene la coordenada x) es $-\mathfrak{A}_x\, dy\, dz$ y el de la cara de la derecha (de coordenada $x + dx$) es $+ (\mathfrak{A}_x)_{x+dx} \cdot dy\, dz$. Desarrollando este último por la serie de TAYLOR y despreciando los términos con potencias de dx superiores a la primera, resulta para valor del término correspondiente a la cara de la derecha :

$$\left(\mathfrak{A}_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz;$$

la suma de los términos correspondientes a ambas caras, la de la derecha y la de la izquierda es, pues, $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$. Análogamente se procede con las caras anterior y posterior y superior e inferior, y sumando resulta :

$$\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma = \int\int\int \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\,; \tag{5}$$

por consiguiente, teniendo en cuenta (4) y (5) :

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}. \tag{6}$$

Observación. En la Matemática no se acostumbra considerar la normal exterior, n, como hemos hecho nosotros, sino la interior, porque de esa manera se llega a expresiones en que sólo es preciso conocer los valores de la función en el espacio S, o, simplemente, que la función esté definida en él. El haber utilizado nosotros la normal exterior ha sido para evitar la molestia del signo *menos*, y ahora establecemos que el vector será considerado siempre en el interior de la superficie; por consiguiente, sólo necesitamos conocer los valores en S.

Veamos ahora la significación geométrica de $\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma$. En el Capítulo I, § 1, hemos representado un campo vectorial trazando tantas líneas $\mathfrak{A}$ (líneas de fuerza) normales a la dirección del campo en la unidad de superficie (supuesta infinitamente pequeña) como indica el valor absoluto $|\mathfrak{A}|$; haciéndolo así, hay $|\mathfrak{A}|\, d\Sigma$ líneas $\mathfrak{A}$ que atraviesan el área $d\Sigma$ normal a $\mathfrak{A}$. Todas estas líneas atraviesan también el elemento, $d\sigma$, de la superficie considerada (fig. 20) limitado por las líneas $\mathfrak{A}$ que pasan por los puntos del contorno de $d\Sigma$ y, como se deduce inmediatamente de la inspección de la figura 20, se tiene :

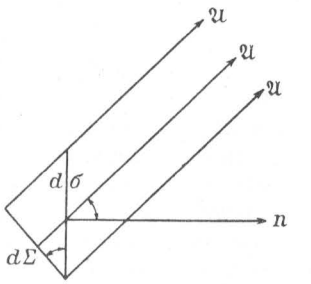

FIG. 20

$$d\Sigma = d\sigma \cos(\mathfrak{A}, n).$$

El elemento $d\sigma$ es atravesado, pues, por

$$|\mathfrak{A}|\, d\Sigma = |\mathfrak{A}| \cos(\mathfrak{A}, n)\, d\sigma = \mathfrak{A}_n\, d\sigma \text{ líneas.}$$

En consecuencia, $\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma$ *indica el número de líneas* $\mathfrak{A}$ *que atraviesan* $d\sigma$ *yendo de dentro hacia afuera* (las que van de fuera hacia adentro se cuentan, por sí mismas, negativamente, porque para ellas es $\cos(\mathfrak{A}, n) < 0$); podemos, pues, decir, que $\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma$ indica el número de líneas $\mathfrak{A}$ que nacen en S, pues las que pasan a través de S se cuentan como negativas una vez, al entrar, y como positivas otra, al salir. Naturalmente, las líneas que mueren en S tienen que contarse como negativas.

Según la ecuación (1), lo ahora dicho demuestra que div $\mathfrak{A}$ representa el número de líneas $\mathfrak{A}$ que se originan en la unidad de volumen.

Si la divergencia de un vector es nula en todos los puntos del espacio, ninguna línea $\mathfrak{A}$ puede tener comienzo ni fin, por consiguiente, todas ellas deben ser cerradas; todo vector de estas condiciones se dice que es un *vector solenoidal* (de $\sigma\omega\lambda\acute{\eta}\nu$, tubo). En los puntos de divergencia positiva nacen líneas $\mathfrak{A}$, y en los puntos de divergencia negativa, mueren; por esta circunstancia, se llama a estos puntos *fuentes*, o *manantiales* y, *sumideros*, respectivamente.

Antes hemos visto que $\mathfrak{A}_n\, d\sigma$ representa el número de líneas $\mathfrak{A}$ que atraviesan el elemento $d\sigma$, luego la expresión $(\mathfrak{A}\,[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]) = \mathfrak{A}_n\,|[\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]|$ usada en el Capítulo I, § 6, representa, cuando se designa con n la normal positiva al plano del paralelogramo construído sobre $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$, el número de líneas $\mathfrak{A}$ que atraviesan este paralelogramo,

Según las ideas de FARADAY acerca de la electricidad, de cada unidad de electricidad positiva parte *una* línea de inducción, y en cada unidad de electricidad negativa *muere* una línea de inducción (hoy se acostumbra usar generalmente la denominación de « líneas de inducción » en lugar de la denominación antes corriente de « líneas de fuerza »; al vector de la inducción eléctrica se le denota por $\mathfrak{D}$). El número de líneas $\mathfrak{D}$ que salen del volumen unidad está, pues, determinado, de una parte, por div $\mathfrak{D}$, pero, por otra, mide la cantidad de electricidad contenida en el volumen unidad, de modo que la densidad eléctrica ϱ es:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho. \tag{7}$$

3. Los rotacionales [1] y el teorema de Stokes

Sea s una curva cualquiera cerrada, dada; consideremos la integral curvilínea $\int_s (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s})$ tomada a lo largo de esta curva cerrada, y vamos a transformarla en una integral de superficie. Para ello trazamos por s una superficie arbitraria, σ, que tenga la línea s como contorno o borde, y tomemos en cada punto de σ la normal, n, haciendo esto, en particular en todos los elementos $d\sigma$ de la superficie correspondientes a este borde, de tal manera que el sentido positivo de $d\sigma$ y la traslación simultánea en la dirección de $+n$ correspondan a la regla del sacacorchos. Consideraremos como sentido positivo en $d\sigma$ el correspondiente al positivo en que puede ser recorrido el elemento ds del arco del borde. Definida así la normal positiva de la superficie para los elementos del contorno queda, mediante la noción de la continuidad, definida para todos los demás puntos.

1.° En la figura 21 se ha representado la curva cerrada s; descompongamos en superficies parciales la

---

[1] En España se llaman también *vórtices* y *torbellinos*. — (*N. del T.*)

superficie trazada por ella, mediante el trazado de curvas auxiliares. Se ve entonces fácilmente que la integral curvilínea $\int(\mathfrak{A}, d\bar{s})$, tomada a lo largo de s, es la suma de las integrales tomadas a lo largo de los contornos de las áreas parciales, pues cada porción de dichos contornos pertenece a dos áreas contiguas y en la integración está recorrida en dos sentidos opuestos y, por tanto, se van anulando unos con otros los sumandos, quedando sólo los que se refieren a la línea s, por ser ésta recorrida una sola vez.

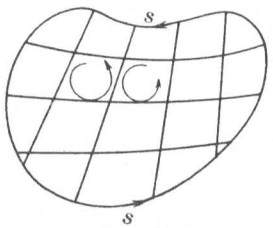

FIG. 21

2.° Definimos el *rotacional* de $\mathfrak{A}$ y lo representamos por rot $\mathfrak{A}$, como un nuevo vector $\mathfrak{R}$ del siguiente modo. Sea s una curva cerrada dada; tracemos por ella una superficie σ que tenga como borde la línea s y llamemos n la normal positiva de σ. El límite del cociente de dividir la integral curvilínea $\int_{\circlearrowleft}(\mathfrak{A}, d\bar{s})$ por el área $\int d\sigma$, cuando σ tiende a cero, es la componente de rot $\mathfrak{A}$ en la dirección de n, es decir:

$$\mathfrak{R}_n = \operatorname{rot}_n \mathfrak{A} = \lim_{\sigma=0} \frac{\int_{\circlearrowleft}(\mathfrak{A}, d\bar{s})}{\int d\sigma}. \qquad (1)$$

3.° Ante todo debemos probar que el vector así definido tiene la propiedad fundamental de los vectores, expresada por la relación que liga el módulo de un vector con sus componentes rectangulares. Para ello construyamos un tetraedro infinitamente pequeño formado con los tres planos coordenados y un cuarto plano perpendicular a la normal n. Las áreas de sus caras serán:

$$d\sigma_x,\ d\sigma_y,\ d\sigma_z,\ d\sigma,$$

y se tiene:

$$d\sigma_x = d\sigma \cos(n, x);\ d\sigma_y = d\sigma \cos(n, y);$$
$$d\sigma_z = d\sigma \cos(n, z). \qquad (2)$$

Formemos además las integrales curvilíneas a lo largo de $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$ en el sentido positivo y designémoslas por $\mathfrak{R}_x\, d\sigma_x$, $\mathfrak{R}_y\, d\sigma_y$, $\mathfrak{R}_z\, d\sigma_z$ respectivamente. Sumándolas y observando que cada arista está recorrida dos veces en sentidos contrarios, salvo las señaladas con flechas, contenidas en la cara opuesta al origen de coordenadas (fig. 22), resulta como valor de la integral a lo largo del contorno de esta cara $d\sigma$, de posición arbitraria:

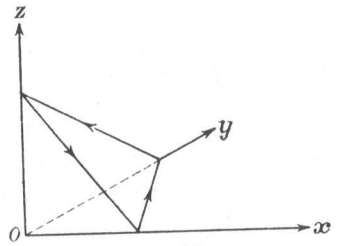

FIG. 22

$$\Sigma(\mathfrak{A}, d\bar{s}) = \mathfrak{R}_n\, d\sigma = \mathfrak{R}_x\, d\sigma_x + \mathfrak{R}_y\, d\sigma_y + \mathfrak{R}_z\, d\sigma_z, \qquad (3)$$

o bien, teniendo en cuenta (2),

$$\Sigma(\mathfrak{A}, d\bar{s}) = \left(\mathfrak{R}_x \cos(n, x) + \mathfrak{R}_y \cos(n, y) + \mathfrak{R}_z \cos(n, z)\right) d\sigma$$
$$= \mathfrak{R}_n\, d\sigma, \qquad (4)$$

como queríamos demostrar.

4.° La ecuación

$$\Sigma\,(\mathfrak{A},\, d\mathfrak{s}) = \mathrm{rot}_n\,\mathfrak{A}\cdot d\sigma \tag{5}$$

es también válida para un triángulo infinitamente pequeño; luego, según 1°, también para un elemento infinitamente pequeño de superficie, $d\sigma$, cualquiera que sea su forma, pero como la integral curvilínea a lo largo de cualquiera línea puede componerse de la suma de las integrales tomadas a lo largo de porciones infinitamente pequeñas, que, por consiguiente, pueden ser consideradas como si fuesen planas, tendremos:

$$\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{A},\, d\mathfrak{s}) = \int_{\mathfrak{O}} \mathrm{rot}_n\,\mathfrak{A}\, d\sigma \tag{6}$$

para toda curva cerrada s. Esta ecuación expresa el teorema de STOKES, que transforma una integral de superficie en una de línea.

Tanto la igualdad (1) como la (5) definen el vector rot $\mathfrak{A}$ independientemente del sistema de coordenadas.

La dirección de este vector se determina del siguiente modo: Se da a la unidad infinitamente pequeña de superficie tres posiciones cualesquiera perpendiculares entre sí dos a dos, a cuyas normales designamos por x, y, z, y se calculan los valores de la integral $\int(\mathfrak{A},\, d\mathfrak{s})$ tomada a lo largo de sus contornos; estos valores serán los componentes del vector rot $\mathfrak{A}$, según (5), y del conocimiento de estos componentes se deduce la magnitud y la dirección del vector. Si se dan al elemento unidad de superficie todas las posiciones posibles y se toma entre ellas la que corresponde al valor máximo de la integral, la normal positiva de la superficie en esta posición da la dirección del vector, y el valor de la integral es el módulo del vector.

5.° Para determinar las componentes de $\mathfrak{R}$ en un sistema de coordenadas cartesianas tomemos una porción de superficie de forma particular para extender a ella la integral, a saber, un rectángulo infinitamente pequeño de lados dy, dz, paralelos a los ejes y y z, y tendremos (fig. 23):

$$\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{A},\, d\mathfrak{s}) = (\mathfrak{A}_z\, dz)_{y+dy} - (\mathfrak{A}_y\, dy)_{z+dz} - (\mathfrak{A}_z\, dz)_y + (\mathfrak{A}_y\, dy)_z. \tag{7}$$

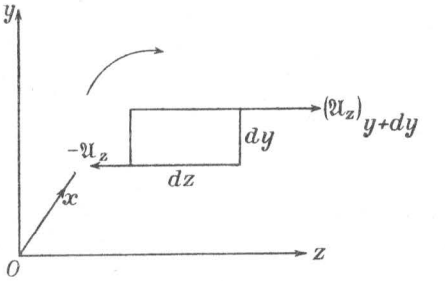

FIG. 23

La integración ha sido comenzada en la parte superior y a la izquierda y se ha seguido el sentido indicado por las flechas.

Desarrollando por la serie de TAYLOR y despreciando los términos que contienen potencias de dy y dz de grado superior al primero, será:

$$\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{A},\, d\mathfrak{s}) = \left(\mathfrak{A}_z + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}\, dy\right) dz - \left(\mathfrak{A}_y + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\, dz\right) dy - \mathfrak{A}_z\, dz + \mathfrak{A}_y\, dy = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right) dy\, dz \tag{8}$$

y, designando el área del rectángulo por $d\sigma_x$,

$$\int_{\sigma} (\mathfrak{A}, d\bar{s}) = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right) d\sigma_x. \tag{9}$$

Resulta, pues,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \operatorname{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \\ \mathfrak{R}_y &= \operatorname{rot}_y \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \\ \mathfrak{R}_z &= \operatorname{rot}_z \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}. \end{aligned} \tag{10}$$

6.° De (1) se sigue:

$$\operatorname{rot} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \operatorname{rot} \mathfrak{A} + \operatorname{rot} \mathfrak{B}. \tag{11}$$

Al deducir la fórmula de STOKES no se ha hecho hipótesis alguna acerca de la forma de la superficie σ, salvo la condición de pasar por la línea de borde s; por consiguiente, si consideramos dos superficies, σ_1 y σ_2, que pasen por s, será:

$$\int_{\sigma_1} \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma_1 = \int_{\sigma_2} \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma_2; \tag{12}$$

las dos superficies σ_1 y σ_2 forman una superficie cerrada σ, y n es la normal exterior en σ_1 a la superficie cerrada constituída por las σ_1 y σ_2, y la interior en σ_2, puesto que el sentido de n está siempre determinado por la regla del sacacorchos. Si en lugar de la normal interior en σ_2 introducimos también la exterior n', la ecuación (12) da esta otra:

$$\int_{\sigma_1} \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \operatorname{rot}_{n'} \mathfrak{A}\, d\sigma_2 = 0, \tag{12'}$$

o bien, sumando las dos integrales y llamando n a la normal interior a la superficie total cerrada σ,

$$\int_{\sigma} \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma = 0, \tag{13}$$

resultado que, según lo dicho en el parágrafo anterior, puede enunciarse así:

Si un vector $\mathfrak{R}$ puede considerarse como rotacional de otro vector $\mathfrak{A}$, las líneas $\mathfrak{R}$ no pueden tener origen ni extremos, sino que tienen que ser cerradas.

Más adelante (Cap. III, § 4) demostraremos el teorema recíproco, es decir, todo vector puede ser representado como rotacional de otro vector, si su integral de superficie tomada sobre cualquier superficie cerrada se anula, o, lo que, según el teorema de GAUSS, es lo mismo, si su divergencia es nula en todos los puntos.

4. Relaciones entre las operaciones diferenciales

1.° Aplicando a la ecuación (13) del parágrafo anterior el teorema de GAUSS (§ 2, (2)) resulta:

$$\int \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} \cdot dS = 0. \tag{1}$$

Como el volumen S es arbitrario, para que se verifique esta igualdad es preciso que se anule el integrando mismo, luego para todo vector $\mathfrak{A}$ es:

$$\text{(l)} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0. \tag{2}$$

2.° Pongamos en la ecuación (6) del parágrafo anterior en lugar del vector $\mathfrak{A}$ el gradiente de un escalar U, esto es:

$$\mathfrak{A} = \operatorname{grad} U; \tag{3}$$

entonces, según § 1, (9'), se anula el primer miembro y resulta :

$$\int_{\sigma} \text{rot}_n \text{ grad } U d\sigma = 0. \tag{4}$$

Como la superficie σ es arbitraria, para que se verifique esta igualdad es preciso que se anule el integrando mismo, luego para todo escalar U es :

(m) $$\text{rot grad } U = 0. \tag{5}$$

3.° La propiedad recíproca de ésta merece que nos detengamos un momento en su consideración. Se trata de saber si un vector, $\mathfrak{G}$, cuyo rotacional es nulo en un cierto espacio, S, puede representarse siempre como vector potencial y, por tanto, resulta siempre gradiente de un escalar U, sea que U tenga un solo valor o pueda tomar varios.

Según el teorema de STOKES se verifica :

$$\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{G}, d\hat{s}) = \int_{\sigma} \text{rot}_n \, \mathfrak{G} \, d\sigma \; ; \tag{6}$$

pero como, por hipótesis, es rot $\mathfrak{G} = 0$, será :

$$\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{G}, d\hat{s}) = 0 \tag{7}$$

y, en consecuencia, según el teorema 2.° del § 1 :

$$\mathfrak{G} = \text{grad } U. \tag{8}$$

En este razonamiento, al pasar de (6) a (7) se ha supuesto implícitamente que en todos los puntos es rot $\mathfrak{G} = 0$, es decir, que toda la superficie σ pertenece al espacio S, en el que, por hipótesis, es rot $\mathfrak{G} = 0$. Habrá casos, sin embargo, en que, aun cuando la curva s esté contenida en el volumen considerado, S, ninguna superficie σ trazada por s pertenezca por entero a dicho espacio S. Tales espacios son los llamados múltiplemente conexos.

Un ejemplo sencillo de un espacio múltiplemente conexo es el interior de un anillo circular (toro), engendrado por la rotación de un círculo alrededor de una recta exterior de su plano. La curva descrita por el centro del círculo, por ejemplo, es una curva s de las condiciones últimamente dichas ; está contenida por entero en S, pero no se puede trazar por ella ninguna superficie σ que pertenezca totalmente a S.

Si, mediante $n - 1$ *cortes* cuyas dos caras se toman como límites de porciones del espacio, se puede conseguir que éste se convierta en *simplemente conexo*, es decir, que por cualquiera línea s se pueda trazar una superficie contenida por entero en S, se dice que *n es el orden de conexión del espacio* o que éste es *n-plemente conexo*.

El volumen encerrado por un toro es doblemente conexo, pues mediante la agregación de un corte meridiano, T por ejemplo, se convierte en simplemente conexo. La figura 24 representa la sección ecuatorial de un toro, simplemente conexo por la agregación del corte T. La integral curvilínea $\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{G}, d\hat{s})$ a lo largo de la línea $s = ACBB'C'A'A$ representada de trazos en la figura, es ahora nula ; existe, pues, un potencial U, y como las partes relativas a $A'A$ y BB' son iguales y de signos contrarios, se tiene :

$$\text{(c)} \int_{A}^{B} (\mathfrak{G}, d\hat{s}) = \text{(c')} \int_{A'}^{B'} (\mathfrak{G}, d\hat{s}), \tag{9}$$

o bien :

$$U_B - U_A = U_{B'} - U_{A'} = j. \tag{10}$$

En el corte agregado puede, pues, sufrir el potencial un salto constante j, es decir, cuando nuevamente se quite el corte, puede ser U una función multiforme del lugar. Si $\mathfrak{G}$ es una fuerza, esto quiere decir que al dar una vuelta completa se ha realizado el trabajo j. Tal

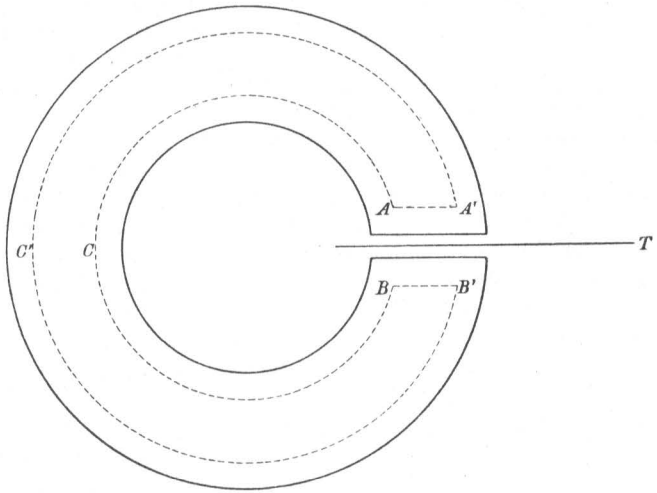

FIG. 24

sucede, por ejemplo, cuando por el eje de rotación del anillo circula una corriente j (medida electromagnéticamente) y $\mathfrak{G}$ representa la fuerza que actúa sobre la masa magnética unidad. Más adelante volveremos sobre este asunto.

4.° La divergencia de un vector potencial $\mathfrak{A}=\text{grad } U$ es una magnitud de extraordinaria importancia en las aplicaciones, que se representa por U y, naturalmente, es independiente del sistema de coordenadas. Se tiene, pues,

(n) $$\Delta U = \text{div grad } U. \qquad (11)$$

Sustituyendo en la igualdad (6) del § 2 las componentes de $\mathfrak{A}$ por sus valores

$$\mathfrak{A}_x=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{A}_y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{A}_z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

(§ 1, (5)), resulta:

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \qquad (12)$$

5.° Vamos a calcular ahora la componente correspondiente al eje x del vector rot rot $\mathfrak{A}$. Poniendo rot $\mathfrak{A}=\mathfrak{R}$, según § 3 (10), esta componente será:

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial z}, \qquad (13)$$

teniendo $\mathfrak{R}$ el valor dado por (10), § 3; por consiguiente:

$$\begin{aligned}\text{rot}_x \text{ rot } \mathfrak{A} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)\\ &=\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial x \partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z^2}\right) \qquad (14)\end{aligned}$$

y sumando y restando $\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2}$ se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}\right).$$

Si se aplica el operador Δ también a vectores, esto es, si se pone

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}=\Delta \mathfrak{A}_x,$$

resulta para definición de $\Delta \mathfrak{A}$:

(o) $$\Delta \mathfrak{A} = \text{grad div } \mathfrak{A} - \text{rot rot } \mathfrak{A}. \qquad (15)$$

6.° De la misma manera se obtiene, utilizando para el cálculo las coordenadas cartesianas:

$$\text{(p)} \qquad \operatorname{div}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}, \operatorname{rot}\mathfrak{A}) - (\mathfrak{A}, \operatorname{rot}\mathfrak{B}) \qquad (16)$$

$$\text{(q)} \qquad \operatorname{rot}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} + (\mathfrak{B}\operatorname{grad})\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\operatorname{grad})\mathfrak{B} \qquad (17)$$

$$\text{(r)} \qquad (\mathfrak{A}\operatorname{grad})\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\operatorname{grad})\mathfrak{A} = \operatorname{grad}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) - [\mathfrak{A}, \operatorname{rot}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}, \operatorname{rot}\mathfrak{A}], \qquad (18)$$

en cuyas expresiones el operador $(\mathfrak{A}\ \text{grad})$ aplicado a un vector $\mathfrak{B}$ representa un vector cuya componente sobre el eje de las x es:

$$(\mathfrak{A}\operatorname{grad})\mathfrak{B}_x = \mathfrak{A}_x\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial z}.$$

Si se introduce la dirección a del vector $\mathfrak{A}$, será $(\mathfrak{A}, \operatorname{grad}\mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}| \cdot \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a}$, es decir $(\mathfrak{A}, \operatorname{grad}\mathfrak{B})$ es la variación del vector $\mathfrak{B}$ en la dirección del vector $\mathfrak{A}$, multiplicada por el valor absoluto de $\mathfrak{A}$.

Se puede reconocer que $(\mathfrak{A}, \operatorname{grad}\mathfrak{B})$ es independiente del sistema de coordenadas, eliminando $(\mathfrak{B}, \operatorname{grad}\mathfrak{A})$ entre (q) y (r).

7.° Denotando por U un escalar, se tiene:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}U) = \frac{\partial}{\partial x}(U\mathfrak{A}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(U\mathfrak{A}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(U\mathfrak{A}_z);$$

luego

$$\text{(s)} \qquad \operatorname{div}(\mathfrak{A}U) = U\cdot\operatorname{div}\mathfrak{A} + (\mathfrak{A}, \operatorname{grad}U). \qquad (19)$$

Dejamos al lector el cuidado de deducir estas últimas fórmulas; limitándonos a la observación de que son independientes del sistema de coordenadas y que,

por consiguiente, se puede tomar, por ejemplo un sistema cartesiano cualquiera para realizar los cálculos previos convenientes, pero sin que por ello sea preciso utilizarlo; en el resultado final del cálculo desaparece, naturalmente, toda traza del sistema coordenado.

8.° La integral, extendida al espacio infinito, del producto escalar de dos vectores, uno de los cuales, $\mathfrak{A}$, es solenoidal, y el otro, $\mathfrak{B}$, es un vector potencial, es nula; luego:

$$\int(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\,dS = 0. \qquad (20)$$

Tomemos como elemento de espacio, dS, los tubos del vector $\mathfrak{A}$ que recorre líneas de fuerza cerradas, los cuales descomponemos por cortes apropiados en cilindros de base $d\sigma$ y altura ds; tendremos entonces:

$$\int(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\,dS = \int\int|\mathfrak{A}|\cdot\mathfrak{B}_s\,d\sigma\,ds,$$

extendiendo una de las integrales a toda la longitud de una línea $\mathfrak{A}$, y representando la otra una sumación extendida a todos los tubos $\mathfrak{A}$.

Pero, por el carácter de solenoidal del vector $\mathfrak{A}$, para cualquier sección $d\sigma$ de un tubo $\mathfrak{A}$ el producto $|\mathfrak{A}|d\sigma$ tiene el mismo valor (pág. 5), luego se puede sacar fuera del signo integral y resulta:

$$\int(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\,dS = \int|\mathfrak{A}|\,d\sigma\oint\mathfrak{B}_s\,ds = 0,$$

puesto que es $\oint\mathfrak{B}_s\,ds = 0$, por haber supuesto que $\mathfrak{B}$ es un vector potencial.

La demostración puede hacerse también del siguiente modo: Por ser $\mathfrak{B}$ un vector potencial podemos poner:

$$\mathfrak{B} = \text{grad } U \tag{21}$$

y se obtiene :

$$\int (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\, dS = \int (\mathfrak{A}, \text{grad } U)\, dS, \tag{22}$$

o bien, teniendo en cuenta (s) y observando que es nula div $\mathfrak{A}$,

$$\int (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\, dS = \int \text{div } (\mathfrak{A} \cdot U)\, dS, \tag{23}$$

y aplicando el teorema de la integral de GAUSS,

$$\int (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\, dS = \int U \cdot \mathfrak{A}_n\, d\sigma, \tag{24}$$

donde σ representa la superficie infinita que rodea todo el espacio. Pero como tampoco en el infinito pueden aparecer ni desaparecer líneas $\mathfrak{A}$, sobre dicha superficie tiene que ser también $\mathfrak{A}_n d\sigma = 0$, lo cual demuestra el teorema.

5. Teorema de Green

Si en la igualdad (s) ponemos

$$\mathfrak{A} = \text{grad } V,$$

resulta :

$$\text{div } (U \text{ grad } V) = U \text{ div grad } V + (\text{grad } U, \text{grad } V), \tag{1}$$

y permutando entre sí U y V :

$$\text{div } (V \text{ grad } U) = V \text{ div grad } U + (\text{grad } U, \text{grad } V). \tag{1'}$$

Aplicando al primer término del segundo miembro la propiedad (n), restando (1') de (1), integrando en un volumen S limitado por la superficie σ, y aplicando al primer miembro el teorema de la integral de GAUSS, se obtiene :

$$\int \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = \int (U \Delta V - V \Delta U)\, dS. \tag{2}$$

Suponiendo en (1)

$$V = U$$

resulta :

$$\text{div } (U \cdot \text{grad } U) = U \text{ div grad } U + (\text{grad } U)^2. \tag{3}$$

Aplicando al primer término del segundo miembro la propiedad (n), integrando en un volumen S limitado por la superficie σ, y aplicando al primer miembro el teorema de la integral de GAUSS, se obtiene :

$$\int (\text{grad } U)^2\, dS + \int U \Delta U dS = \int U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma. \tag{4}$$

Las fórmulas (2) y (4) han sido encontradas por GREEN.

Teorema. Un vector $\mathfrak{A}$ está definido *unívocamente* en un espacio simplemente conexo, S, cuando se dan en todo el espacio div $\mathfrak{A}$ y rot $\mathfrak{A}$ y sobre la superficie σ que limita el espacio S la componente normal de $\mathfrak{A}$, o sea $\mathfrak{A}_n$.

La demostración que sigue es tipo de las que se emplean en Física matemática para probar la unicidad.

Supongamos que hubiera otro vector $\mathfrak{A}'$ diferente del $\mathfrak{A}$ que satisfaga a las mismas condiciones que el $\mathfrak{A}$; entonces la diferencia $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ satisfaría a las condiciones

$$\text{div } \mathfrak{B} = 0 \quad (5a), \qquad \text{rot } \mathfrak{B} = 0 \quad (5b), \qquad \mathfrak{B}_n = 0 \quad (5c)$$

Teniendo en cuenta (5b) y lo dicho en el Capítulo II, § 4, teorema 3.°, se puede poner, en espacios simplemente conexos:

$$\mathfrak{B} = \text{grad } U;$$

luego, según (5a) y (n), es:

$$\Delta U = 0. \tag{6}$$

La igualdad (5c) demuestra que es:

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0, \tag{7}$$

y poniendo los valores (6) y (7) en (4) resulta:

$$\int (\text{grad } U)^2 \, dS = 0, \tag{8}$$

lo cual exige, por ser el integrando esencialmente positivo, que en todo el espacio sea:

$$\text{grad } U = \mathfrak{B} = 0, \tag{9}$$

o bien:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'. \tag{10}$$

La demostración de que es nulo $\mathfrak{B}$ cuando se satisfacen las condiciones (5) se puede efectuar del siguiente modo, más geométrico.

Por ser rot $\mathfrak{B} = 0$ y, por tanto, también en todo espacio simplemente conexo $\int_{\sigma} (\mathfrak{B}, \, d\mathfrak{s}) = 0$, se sigue (Cap. II, § 1, teor. 1.°) que en S no hay ninguna línea $\mathfrak{B}$ cerrada; de div $\mathfrak{B} = 0$ se deduce que en S no nace ni muere ninguna línea $\mathfrak{B}$ (§ 2), y de $\mathfrak{B}_n = 0$ resulta que a través de la superficie σ no penetra en S ninguna línea $\mathfrak{B}$, luego ninguna línea $\mathfrak{B}$ puede estar contenida en S.

Observación. Cuando S representa el espacio infinito, también es infinita σ, que puede ser tomada, por ejemplo, como una esfera de radio infinito cuyo centro es un punto propio. Si no existe ninguna línea $\mathfrak{A}$ en el infinito, es allí $\mathfrak{A}_n = 0$; por consiguiente, el caso dado. Pero no basta que se anule en el infinito $\mathfrak{A}_n$ para que podamos decir que ninguna línea $\mathfrak{A}$ se extiende hasta el infinito, sino que debe anularse la integral

$$\int \mathfrak{A}_n \, d\sigma = \int \mathfrak{A}_n \, R^2 \cdot d\omega,$$

extendida a cualquier parte de la esfera de radio infinito R. En esta expresión, $d\omega$ denota un elemento de la superficie de una esfera de radio unidad. De aquí se sigue que es necesario que $\mathfrak{A}_n$ sea un infinitésimo de orden superior a $\frac{1}{R^2}$ para poder afirmar que ninguna línea $\mathfrak{A}$ se extiende hasta el infinito.

Si aplicamos (4) al espacio infinito y U se anula al mismo tiempo que $\frac{1}{R}$, serán infinitésimos del mismo orden $\frac{\partial U}{\partial n}$ y $\frac{1}{R^2}$, luego también $U \frac{\partial U}{\partial n}$ y $\frac{1}{R^3}$; por consiguiente, la integral extendida a la esfera infinita de radio R es nula. Además, si se anula U al mismo tiempo que $\frac{1}{R}$, también se anula $\mathfrak{B} = \text{grad } U$ con $\frac{1}{R^2}$. Podemos, pues, decir, que:

$\mathfrak{A}$ está determinado unívocamente en el espacio infinito cuando se dan div $\mathfrak{A}$ y rot $\mathfrak{A}$, y $\mathfrak{A}$ se anula en el infinito con $\frac{1}{R^2}$.

Para que la integral de superficie que figura en (4) se anule, basta que U sea de orden superior a $R^{-\frac{1}{2}}$, es decir, en el teorema que acabamos de enunciar es sufi-

ciente que $\mathfrak{A}$ esté dado en el infinito, salvo en las magnitudes de orden superior a $R^{-\frac{1}{2}}$ (1).

6. Discontinuidades

Hasta ahora hemos considerado siempre los vectores como funciones continuas del lugar ; se presentan casos, sin embargo, en los que no sucede así. Sea Σ una superficie en la que el vector $\mathfrak{A}$ es discontinuo.

1.° Construyamos un cilindro de bases $d\sigma_1$ y $d\sigma_2$, paralelas a Σ, y altura h, infinitamente pequeña respecto de las dimensiones de las bases, y apliquémosle el teorema de GAUSS. La integral extendida a la superficie lateral desaparece entonces, como infinitésimo de orden superior, y resulta, poniendo $d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma$,

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot h \cdot d\sigma = (\mathfrak{A}_{n_1} + \mathfrak{A}_{n_2})\, d\sigma \,; \qquad (1)$$

o bien, introduciendo una sola dirección de normal, n, y distinguiendo los valores de $\mathfrak{A}$ a los dos lados de Σ por los signos + y — (fig. 25), y dividiendo por $d\sigma$:

$$h \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n^+ - \mathfrak{A}_n^- . \qquad (2)$$

Si la componente normal de un vector $\mathfrak{A}$ en una superficie es discontinua, en aquellos puntos es infinitamente grande div $\mathfrak{A}$, puesto que h es infinitamente pequeña en (2) ; pero $h \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A}$ se conserva finita. Poniendo

$$h \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A} = \varrho_\sigma , \qquad (3)$$

ϱ_σ indica el número de líneas $\mathfrak{A}$ que se originan en la superficie unidad (supuesta infinitamente pequeña) de Σ.

(1) O. BLUMENTHAL da en *Math. Ann.*, tomo LXI, 1905, página 235, una demostración de este teorema, que sólo supone la anulación de $\mathfrak{A}$ y sus derivadas en el infinito, pero sin hacer hipótesis alguna sobre órdenes de infinitésimos.

Si admitimos la hipótesis de FARADAY en la teoría de la Electricidad, de que la unidad de cantidad de electricidad da origen a una línea $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{D}$ representa la

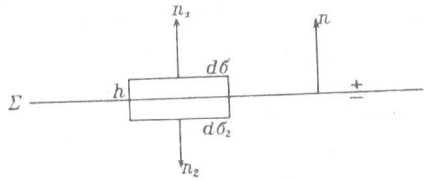

FIG. 25

inducción eléctrica), div $\mathfrak{D}$ representa, como vimos en el § 2 (7), la densidad espacial de la electricidad ; ésta es

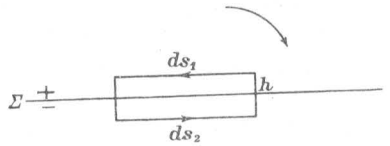

FIG. 26

infinita si $\mathfrak{D}$ es discontinua, luego tenemos ahora que considerar una *densidad superficial* ϱ_σ *finita* (3) :

$$\mathfrak{D}_n - \mathfrak{D}_n^- = \varrho_\sigma .$$

La cantidad total de electricidad $\int \varrho_\sigma\, d\sigma$ existente en Σ, es decir, el número de líneas $\mathfrak{D}$ que nacen en Σ se conserva finito y es :

$$\int_\Sigma (\mathfrak{D}_n^+ - \mathfrak{D}_n^-)\, d\sigma .$$

2.° Apliquemos ahora el teorema de STOKES a un rectángulo, en el cual dos lados, de longitud h, son nor-

males a Σ, mientras que los otros dos, ds_1 y ds_2 son paralelos a Σ, y sea h infinitamente pequeño respecto de ds_1 y ds_2, de modo, pues, que la integral curvilínea a lo largo de h sea nula. Entonces, poniendo $ds_1 = -ds_2 = ds$, como es $d\sigma = ds \cdot h$, tendremos:

$$\mathfrak{A}_{s_1} ds_1 + \mathfrak{A}_{s_2} ds_2 = \mathrm{rot}_t \mathfrak{A} \cdot ds \cdot h, \tag{4}$$

o bien, introduciendo *una* dirección s y dividiendo por ds:

$$\mathfrak{A}_s^+ - \mathfrak{A}_s^- = \mathrm{rot}_t \mathfrak{A} \cdot h, \tag{5}$$

siendo, en este caso, s y t dos direcciones perpendiculares entre sí en la superficie Σ. La componente tangencial $\mathrm{rot}_t \mathfrak{A}$ es, pues, infinitamente grande, pero tal que la integral de superficie

$$\int \mathrm{rot}_t \mathfrak{A} \cdot d\sigma$$

se conserva finita. Tales discontinuidades se presentan en los medios en movimiento en Electrodinámica.

3.° El caso en que un escalar U es discontinuo en una superficie ha sido ya considerado en el § 4. Supongamos el salto $U^+ - U^- = j$, y que tenemos un vector $\mathfrak{G} = \mathrm{grad}\ U$; éste será infinitamente grande en la superficie de discontinuidad, pero la integral curvilínea extendida desde un lado de la superficie, a través de ésta, hasta el punto opuesto es finita:

$$(\mathfrak{G}, ds) = U^+ - U^- = j. \tag{6}$$

Si $\mathfrak{G}$ representa una fuerza, ésta será infinita en la superficie. Sin embargo, el trabajo realizado en la traslación de un punto material a través de la superficie se conserva finito. Tales casos se presentan en las llamadas superficies dobles (superficies activas electromotóricamente).

7. Derivadas respecto del tiempo

Como en los problemas de la Hidrodinámica y de la Electrodinámica en medios en movimiento, la base o *sostén* del campo tiene una cierta velocidad, $\mathfrak{v}$, las variaciones de las magnitudes consideradas con respecto al tiempo pueden definirse desde dos diferentes puntos de vista; pueden expresarse las variaciones en un punto determinado del espacio o las variaciones en un determinado elemento material que participa del movimiento. Sea W (o también, $\mathfrak{W}$) una propiedad escalar (vectorial) del campo, que se considera función del lugar y del tiempo. Esta propiedad puede variar *en un elemento material dado* por dos causas. En primer término, puede variar W ($\mathfrak{W}$) permaneciendo fijo el elemento, porque W ($\mathfrak{W}$) sea función explícita del tiempo, pero también puede variar con el tiempo porque el elemento cambie de posición llegando a puntos en que W ($\mathfrak{W}$), como función del lugar, tenga otros valores. La variación total en un elemento material se compone de estas dos variaciones parciales. Por ejemplo, cuando vamos en un vagón de ferrocarril, la temperatura del compartimiento puede variar con el tiempo por dos causas: de una parte, depende del lugar donde se encuentra el tren, la cual es función del tiempo; pero aunque en todos los puntos de un lugar fuese constante, podría variar porque el tren, en su movimiento, varía constantemente de lugar.

Designemos la variación de W ($\mathfrak{W}$) que tiene lugar en la *partícula material* en la unidad de tiempo por $\frac{dW}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{W}}{dt}\right)$, y la correspondiente a un *lugar dado* por $\frac{\partial W}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right)$; tendremos, entonces,

$$\frac{dW}{dt}=\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial W}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}, \qquad (1)$$

o bien, empleando la notación vectorial,

$$\left.\begin{aligned}\frac{dW}{dt}&=\frac{\partial W}{\partial t}+(\mathfrak{v},\ \text{grad}\ W)\\ \text{y análogamente}\\ \frac{d\mathfrak{W}}{dt}&=\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}+(\mathfrak{v},\ \text{grad})\ \mathfrak{W}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Así por ejemplo, si se trata de una propiedad estacionaria en la materia que se mueve, es $\frac{d}{dt}=0$, y, por tanto, $\frac{\partial}{\partial t}=-\mathfrak{v}\ \text{grad}$.

1.° Consideremos la magnitud $\frac{d}{dt}\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma$, de mucha importancia en las aplicaciones; esta magnitud es el aumento en la unidad de tiempo de líneas $\mathfrak{A}$ que atraviesan una superficie *fija en la materia*, e introduzcamos la magnitud $\frac{\partial}{\partial t}$ en vez de la $\frac{d}{dt}$, es decir, la variación en el lugar dado.

El número de las líneas $\mathfrak{A}$ que atraviesan la superficie σ puede desde luego variar con el tiempo quedando fija la superficie, porque $\mathfrak{A}$ es función del tiempo. Esta variación vale

$$\int_\sigma \frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t}\cdot d\sigma .$$

Además, hay que agregar la variación debida a la traslación $\mathfrak{v}dt$ en el tiempo dt.

La superficie descrita por el elemento $d\mathfrak{s}$ de la curva borde de σ en el tiempo dt es $|[d\mathfrak{s}, \mathfrak{v}]|$ (fig. 27). Designemos las posiciones de la superficie σ correspondientes a los tiempos t y $t+dt$ por σ_1 y σ_2, respectivamente, y la descrita por la línea borde en su traslación por σ_3; el conjunto de estas tres superficies σ_1, σ_2 y σ_3 forma

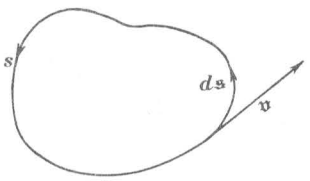

FIG. 27

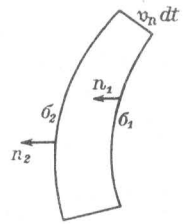

FIG. 28

una superficie cerrada a la que podremos aplicar el teorema de GAUSS. Resulta así:

$$\int_{\sigma_2}\mathfrak{A}_n\, d\sigma-\int_{\sigma_1}\mathfrak{A}_n\, d\sigma+dt\int_s(\mathfrak{A},[d\mathfrak{s},\mathfrak{v}])=\int \text{div}\ \mathfrak{A}\ dS.$$

El tercer término del primer miembro es, según (f),

$$dt\int_s([\mathfrak{v},\mathfrak{A}],d\mathfrak{s})$$

y, aplicando el teorema de STOKES,

$$dt\int_{\sigma_1}\text{rot}_n\,[\mathfrak{v},\mathfrak{A}]\,d\sigma.$$

Pero se tiene (fig. 28) $dS=\mathfrak{v}_n\,dt\cdot d\sigma$; luego la variación de la integral es:

$$\int_{\sigma_2}\mathfrak{A}_n\,d\sigma-\int_{\sigma_1}\mathfrak{A}_n\,d\sigma=\int_{\sigma_1}\text{div}\,\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{v}_n\,d\sigma\cdot dt+\int_{\sigma_1}\text{rot}_n\,[\mathfrak{A},\mathfrak{v}]\,d\sigma\cdot dt.$$

Dividiendo por dt y agregando el término $\int_{\sigma_1} \frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t} d\sigma$ correspondiente a la primera variación antes considerada, resulta :

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{A}_n \, d\sigma = \int d\sigma \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t} + \mathfrak{v}_n \operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{rot}_n [\mathfrak{A}, \mathfrak{v}] \right\}. \qquad (3)$$

Definiendo el vector

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{rot} [\mathfrak{A}, \mathfrak{v}], \qquad (4)$$

podremos escribir, según (3), para todo elemento de superficie :

$$\frac{d}{dt}\left\{ \mathfrak{A}_n \, d\sigma \right\} = \frac{d\mathfrak{A}_n}{dt} d\sigma. \qquad (5)$$

Sustituyendo en (4) $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ por su valor deducido de la segunda fórmula (2) se obtiene :

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{A} + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{rot} [\mathfrak{A}, \mathfrak{v}],$$

y aplicando la fórmula (q) :

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{v} - (\mathfrak{A} \operatorname{grad}) \mathfrak{v}. \qquad (6)$$

2.° Determinemos ahora la variación, debida al tiempo, de la integral de volumen $\int U dS$ extendida a un espacio *material*, S, limitado por la superficie σ ; se trata, pues, de transformar la expresión $\frac{d}{dt}\int U \cdot dS$.

Se tiene :

$$\frac{d}{dt}\int U \cdot dS = \int \frac{\partial U}{\partial t} \, dS + \int U \mathfrak{v}_n \, d\sigma; \qquad (7)$$

el primer término procede de la variación, con el tiempo, de U en un punto dado, por ser función explícita del tiempo ; el segundo término es debido a deformaciones de la materia que, en la unidad de tiempo, originan en el elemento de superficie $d\sigma$ el elemento de volumen $\mathfrak{v}_n \, d\sigma$. Transformando la segunda integral del segundo miembro por medio del teorema de GAUSS resulta :

$$\frac{d}{dt}\int U \cdot dS = \int \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \operatorname{div} (U\mathfrak{v}) \right\} dS \, . \qquad (8)$$

Sustituyendo $\frac{\partial U}{\partial t}$ en esta fórmula (8) por su valor deducido de la primera de las (2), y aplicando a div $(U\mathfrak{v})$ la (s), se obtiene :

$$\frac{d}{dt}\int U \cdot dS = \int \left(\frac{dU}{dt} + U \operatorname{div} \mathfrak{v} \right) dS. \qquad (9)$$

CAPÍTULO III

Coordenadas curvilíneas. Descomposición de vectores. Deformaciones mecánicas

1. El elemento de línea en coordenadas curvilíneas ortogonales

Hasta aquí hemos eludido de propósito el empleo de sistemas de coordenadas, y sólo para cálculos auxiliares hemos utilizado coordenadas cartesianas; ahora vamos a tratar de expresar todas las fórmulas por medio de coordenadas curvilíneas. En Física matemática es de la mayor importancia la aplicación de estas coordenadas, porque con su empleo las condiciones en los límites que se presentan en las ecuaciones entre derivadas parciales toman formas más sencillas, cuando se escoge convenientemente el sistema de coordenadas.

Nos limitaremos, sin embargo, a las coordenadas rectangulares, las más importantes para las aplicaciones, es decir, a los casos en que las superficies de los distintos haces coordenados se cortan ortogonalmente.

Designemos las coordenadas curvilíneas por u, v, w, y sea x, y, z un sistema directo. Las coordenadas cartesianas x, y, z vienen dadas como funciones de las u, v, w:

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v, w), \\ y &= f_2(u, v, w), \\ z &= f_3(u, v, w). \end{aligned} \tag{1}$$

El elemento de la línea de intersección de las superficies $v = \text{const.}$ y $w = \text{const.}$, donde, por consiguiente, sólo varía la u, se representa por

$$ds_u = e_1\,du;$$

análogamente son

$$\begin{aligned} ds_v &= e_2\,dv, \\ ds_w &= e_3\,dw, \end{aligned} \tag{2}$$

en cuyas expresiones las e son funciones de u, v, w.

Cuando u, v, w varían simultáneamente, es:

$$ds^2 = e_1^2\,du^2 + e_2^2\,dv^2 + e_3^2\,dw^2. \tag{3}$$

Los tres elementos de superficie que se obtienen cuando:

1.° es constante u y varían v y w en dv y dw, respectivamente;

2.° es constante v y varían w y u en dw y du, respectivamente;

3.° es constante w y varían u y v en du y dv, respectivamente,

son, respectivamente,

$$d\sigma_u = e_2 e_3\,dv\,dw; \quad d\sigma_v = e_3 e_1\,dw\,du; \quad d\sigma_w = e_1 e_2\,du\,dv. \tag{4}$$

El elemento de volumen limitado por las superficies u, $u + du$; v, $v + dv$; w, $w + dw$, es:

$$dS = e_1 e_2 e_3\,du\,dv\,dw. \tag{5}$$

Ejemplo 1.° Coordenadas cilíndricas. Se tiene:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\,\text{sen}\,\varphi, \\ z &= z; \end{aligned} \tag{6}$$

se corresponden, pues,

$$\begin{array}{cccc} u, & v, & w, \\ r, & \varphi, & z. \end{array}$$

Sea en un plano $z = \text{const.}$ (fig. 29), $OP = r$; $\sphericalangle POA = \varphi$; $PQ = dr$; $\sphericalangle POR = d\varphi$, y, por tanto, $RP = r d\varphi$. Tendremos, entonces:

$$ds_r = dr, \quad ds_\varphi = r d\varphi, \quad ds_z = dz;$$

por consiguiente, son:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = r, \quad e_3 = 1,$$

de donde se sigue:

$$d\sigma_r = r\, d\varphi\, dz; \quad d\sigma_\varphi = dz\, dr; \quad d\sigma_z = r\, dr\, d\varphi; \quad dS = r\, dr\, d\varphi\, dz.$$

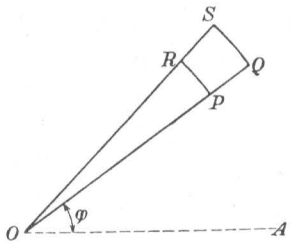

FIG. 29

Ejemplo 2.° Coordenadas esféricas (coordenadas polares del espacio). Se tiene:

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta. \end{aligned} \qquad (7)$$

Se corresponden, pues,

u,	v,	w
r,	ϑ,	φ.

Geométricamente resulta:

$$ds_r = dr, \quad ds_\vartheta = r d\vartheta, \quad ds_\varphi = r \operatorname{sen} \vartheta\, d\varphi;$$

por consiguiente, son:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = r, \quad e_3 = r \operatorname{sen} \vartheta;$$

de donde se sigue:

$$d\sigma_r = r^2 \operatorname{sen} \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi; \quad d\sigma_\vartheta = r \operatorname{sen} \vartheta\, d\varphi\, dr; \quad d\sigma_\varphi = r\, dr\, d\vartheta;$$
$$dS = r^2 \operatorname{sen} \vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

2. Las operaciones vectoriales en coordenadas curvilíneas

1.° El producto escalar se expresa en coordenadas curvilíneas así:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_u \mathfrak{B}_u + \mathfrak{A}_v \mathfrak{B}_v + \mathfrak{A}_w \mathfrak{B}_w, \qquad (1)$$

y el producto vectorial:

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_u = \mathfrak{A}_v \mathfrak{B}_w - \mathfrak{A}_w \mathfrak{B}_v. \qquad (2)$$

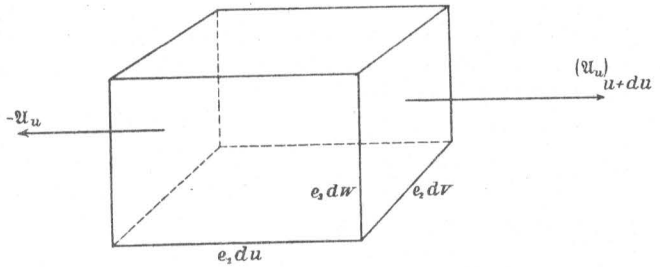

FIG. 30

2.° Aplicando la definición dada en el Capítulo II, § 2 (1):

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\sum \mathfrak{A}_n\, d\sigma}{dS},$$

al elemento de volumen antes calculado,

$$dS = e_1 e_2 e_3\, du\, dv\, dw,$$

se obtiene:

$$\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma = (\mathfrak{A}_u e_2 e_3\, dv\, dw)_{u+du} - (\mathfrak{A}_u e_2 e_3\, dv\, dw)_u + \ldots \qquad (3)$$

representando los puntos suspensivos los términos pro-

cedentes de la integración sobre los otros dos pares de superficies, correspondientes a $v = \text{const.}$ y $w = \text{const.}$

Desarrollando por las potencias de du, dv y dw y despreciando las de grado superior al primero queda:

$$\int \mathfrak{A}_n \, d\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial u} e_2 e_3 \mathfrak{A}_u + \frac{\partial}{\partial v} e_3 e_1 \mathfrak{A}_v + \frac{\partial}{\partial w} e_1 e_2 \mathfrak{A}_w \right) du \, dv \, dw; \quad (4)$$

por consiguiente, es:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left\{ \frac{\partial e_2 e_3 \mathfrak{A}_u}{\partial u} + \frac{\partial e_3 e_1 \mathfrak{A}_v}{\partial v} + \frac{\partial e_1 e_2 \mathfrak{A}_w}{\partial w} \right\}. \quad (5)$$

Cuando se trata de coordenadas cilíndricas, sustituyendo en esta expresión los valores de las e, u, v, w dados en el § 1, resulta:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}, \quad (6)$$

y para coordenadas esféricas:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \mathfrak{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial \operatorname{sen} \vartheta \, \mathfrak{A}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

3.° La expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas es, según la definición:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_s U &= \frac{\partial U}{\partial s}, \\ \operatorname{grad}_u U &= \frac{1}{e_1} \frac{\partial U}{\partial u}, \\ \operatorname{grad}_v U &= \frac{1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial v}, \\ \operatorname{grad}_w U &= \frac{1}{e_3} \frac{\partial U}{\partial w}. \end{aligned} \quad (8)$$

4.° Sustituyendo en (5) $\mathfrak{A} = \operatorname{grad} U$ y teniendo en cuenta (n) resulta:

$$\Delta U = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial w} \right\}. \quad (9)$$

En coordenadas cilíndricas será:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial r \dfrac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (9')$$

y en coordenadas esféricas:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \dfrac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial \operatorname{sen} \vartheta \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \quad (9'')$$

En lugar del primer término del segundo miembro se puede también escribir $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 rU}{\partial r^2}$, de modo que también es:

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 rU}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial \operatorname{sen} \vartheta \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \quad (9''')$$

5.° Aplicando la definición dada en el Capítulo II, § 3 (1):

$$\operatorname{rot}_n \mathfrak{A} = \frac{\sum (\mathfrak{A}, d\tilde{s})}{d\sigma_n}, \quad (10)$$

al elemento de superficie de aristas $e_2 dv$ y $e_3 dw$ (fig. 31) se obtiene:

$$\sum (\mathfrak{A}, d\tilde{s}) = (\mathfrak{A}_v e_2)_w \, dv + (\mathfrak{A}_w e_3)_{v+dv} \, dw - (\mathfrak{A}_v e_2)_{w+dw} \, dv - (\mathfrak{A}_w e_3)_v \, dw,$$

o bien, desarrollando por la serie de TAYLOR y limitándonos a los términos de primer orden:

$$\sum(\mathfrak{A}, d\bar{s}) = \left[\frac{\partial}{\partial v}(e_3 \mathfrak{A}_w) - \frac{\partial}{\partial w}(e_2 \mathfrak{A}_v)\right] dv\, dw,$$

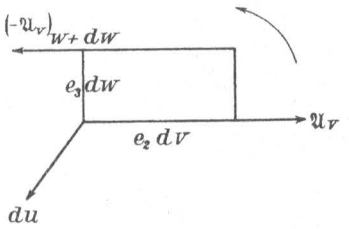

FIG. 31

y, por tanto, como es $d\sigma_n = e_2 e_3 dv\, dw$ será, teniendo en cuenta (10),

$$\text{rot}_u \mathfrak{A} = \frac{1}{e_2 e_3}\left(\frac{\partial e_3 \mathfrak{A}_w}{\partial v} - \frac{\partial e_2 \mathfrak{A}_v}{\partial w}\right),$$

y, del mismo modo,

$$\begin{aligned} \text{rot}_v \mathfrak{A} &= \frac{1}{e_3 e_1}\left(\frac{\partial e_1 \mathfrak{A}_u}{\partial w} - \frac{\partial e_3 \mathfrak{A}_w}{\partial u}\right), \\ \text{rot}_w \mathfrak{A} &= \frac{1}{e_1 e_2}\left(\frac{\partial e_2 \mathfrak{A}_v}{\partial u} - \frac{\partial e_1 \mathfrak{A}_u}{\partial v}\right). \end{aligned} \qquad (11)$$

3. La ecuación del potencial y la ecuación de las ondas

La ecuación de LAPLACE $\Delta U = 0$, cuando se utilizan coordenadas esféricas y U depende sólo de r, pero no de ϑ y φ es, teniendo en cuenta (9''), § 2:

$$\frac{dr^2 \dfrac{dU}{dr}}{dr} = 0; \qquad (1)$$

integrando, resulta:

$$U = \frac{a}{r} + b, \qquad (2)$$

donde a y b son las constantes de integración.

Para $a = 1$ y $b = 0$ tenemos, pues, la integral particular

$$U = \frac{1}{r}, \qquad (2')$$

donde r representa la distancia del punto variable a uno fijo, p. Como en las fórmulas del Capítulo II, § 5, hemos supuesto finitas todas las magnitudes consideradas, el punto p no puede estar en el espacio en cuestión, S, porque entonces sería U infinito.

Para dos escalares U y V se verifica (Cap. II, § 5, (2)):

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = \int (U\Delta V - V\Delta U)\, dS. \qquad (3)$$

Si ponemos $U = \dfrac{1}{r}$ y p está en S, para excluir el punto p podremos trazar una esfera de radio a que tenga el centro en p y no contar su volumen al valuar S (figura 32 a). Al volumen así obtenido, que designaremos por S', podremos aplicarle la fórmula (3) que acabamos de escribir, pero contando la superficie esférica como formando parte de la σ, y sobre ella, la normal exterior y de S' coincide con $-a$ (fig. 32 a).

Como, según (2'), es $\Delta U = 0$, tendremos:

$$\int \frac{\Delta V}{r}\, dS' = \int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma + \int \left(V \frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial a} - \frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial a} \right) a^2\, d\omega, \qquad (4)$$

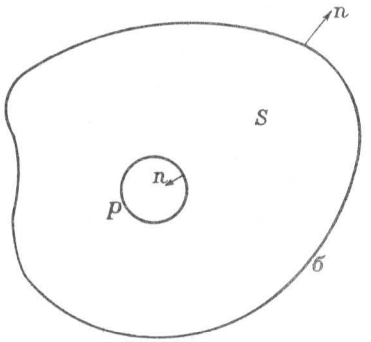

FIG. 32 *a*

siendo $d\omega$ el elemento de superficie de la esfera unidad (por consiguiente, $d\sigma = a^2 d\omega$ en la superficie esférica de radio a).

Ahora bien; se tiene:

$$\frac{\partial \frac{1}{a}}{\partial a} = -\frac{1}{a^2}, \qquad (5)$$

luego

$$\int \frac{\Delta V}{r}\, dS' = \int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma = -\int V d\omega - a \int \frac{\partial V}{\partial a}\, d\omega. \qquad (6)$$

Haciendo ahora que el radio de la esfera disminuya tendiendo a 0, en el límite será $S' = S$ y se anulará el último término del segundo miembro: $\int V d\omega$ tiende a $4\pi V_p$ si V_p, es el valor de V en el punto p, y tendremos:

$$4\pi V_p = -\int \frac{\Delta V}{r}\, dS + \int \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right) d\sigma. \qquad (7)$$

Si se considera el espacio infinito y se anula V en el infinito al mismo tiempo que $\frac{1}{r}$, la integral de superficie que figura en (7) desaparece y queda:

$$V_p = -\int \frac{\Delta V}{4\pi r}\, dS. \qquad (8)$$

Si suponemos ahora que se verifica la ecuación de POISSON:

$$\Delta V = -\varrho, \qquad (9)$$

en la que ϱ es una función dada del lugar, una solución será:

$$V_p = \int \frac{\varrho}{4\pi r}\, dS. \qquad (10)$$

Observemos una vez más que ϱ representa el valor de una función del lugar en el punto variable del campo de integración S; r es la distancia de este punto variable al fijo p, y entonces queda determinado el valor de V en p por (10). Al realizar en el Capítulo II, § 5, la integración parcial con la que aparecen las integrales de superficie en (4), hemos supuesto implícitamente hasta ahora la continuidad de V y de sus primeras derivadas. Cuando, en determinadas superficies σ, es $\frac{\partial V}{\partial n}$ discontinua, también hay que excluir estas superficies y contar sus dos caras entre las que limitan S' (fig. 32 *b*). La normal positiva es, como siempre, la normal exterior del volumen S'; está, pues, dirigida hacia la superficie excluída σ.

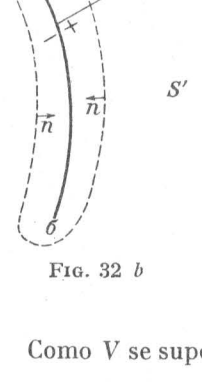

FIG. 32 *b*

Como V se supone continua, la integral $\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma$ tomada sobre la superficie representada de puntos en la figura 32 *b*, tiene un valor nulo, mientras que la $\int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$ es finita y distinta de cero. Si introducimos *una* normal n a σ, la normal exterior de la derecha de σ coincide con $-n$ y la de la izquierda con $+n$, puesto que se puede hacer que la superficie punteada tienda a confundirse con la σ, y se obtiene:

$$-\int \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{-} \right\} d\sigma.$$

La ecuación (7) da, por consiguiente, ahora, esta otra, válida para el espacio infinito:

$$V_p = -\int \frac{\Delta V}{4\pi r} dS - \int \frac{1}{4\pi r} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{-} \right\} d\sigma. \qquad (8')$$

Si

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{-} = -\varrho_\sigma \qquad (9')$$

es una función del lugar dada en σ, la consideración de (9) y (9') da:

$$V_p = \int \frac{\varrho}{4\pi r} dS + \int \frac{\varrho_\sigma}{4\pi r} d\sigma. \qquad (10')$$

Consideraciones completamente análogas pueden hacerse respecto de la ecuación

$$\Delta U + k^2 U = 0, \qquad (11)$$

muy importante en la teoría de las ondas.

Si se quiere encontrar una integral particular que sea independiente de ϑ y φ, se escribe (11), teniendo presente § 2, (9'''):

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 rU}{dr^2} + k^2 U = 0, \qquad (12)$$

y poniendo, por el momento, $rU = W$, esta ecuación se transforma en la

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + k^2 W = 0; \qquad (12')$$

luego es

$$W = e^{\pm ikr},$$

como se comprueba inmediatamente sin más que derivar ; es decir,

$$U = \frac{e^{\pm ikr}}{r} \tag{13}$$

es una integral particular de (11).

Sustituyendo en (3) el valor de U dado por (13), después de haber trazado, como antes, una superficie esférica de centro p, resulta :

$$\int \frac{e^{\pm ikr}}{r} (\triangle V + k^2 V)\, dS'$$

$$= \int \left(\frac{e^{\pm ikr}}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \frac{e^{\pm ikr}}{r}}{\partial n} \right) d\sigma$$

$$+ \int \left(V \frac{\partial \frac{e^{\pm ika}}{a}}{\partial a} - \frac{e^{\pm ika}}{a} \frac{\partial V}{\partial a} \right) a^2\, d\omega. \tag{14}$$

Haciendo, ahora, que la esfera tienda a reducirse al punto p y que la superficie σ se extienda al infinito, con lo cual la integral de superficie se anula, puesto que tanto V como $\frac{1}{r^2}$ se anulan en el infinito, resultará :

$$4\pi V_p = -\int \frac{e^{\pm ikr}}{r} (\triangle V + k^2 V)\, dS. \tag{15}$$

Si se verifica la ecuación

$$\triangle V + k^2 V = -\varrho, \tag{16}$$

siendo ϱ una función dada del lugar, la ecuación (15) da una solución

$$V_p = \int \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r} \varrho \cdot dS\,; \tag{17}$$

más adelante haremos uso de este resultado.

4. Descomposición de un vector en un vector potencial y otro solenoidal

Vimos en el Capítulo II, § 5 que un vector está *determinado univocamente* cuando se dan su divergencia y su rotacional y el vector es del mismo orden que $\frac{1}{r^2}$ [1] en el infinito. Ahora nos proponemos *encontrar* este vector.

Supongamos, pues,

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \varrho, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{J}, \tag{2}$$

siendo ϱ y $\mathfrak{J}$ magnitudes dadas, de las cuales ϱ es un escalar y $\mathfrak{J}$ un vector, no completamente arbitrario, pues de la condición (2) y de la fórmula (l) de la tabla final se deduce que debe ser :

$$\operatorname{div} \mathfrak{J} = 0. \tag{2'}$$

Descompongamos $\mathfrak{A}$ en la suma

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \tag{3}$$

y determinemos $\mathfrak{A}$ por descomposición de tal modo que sea :

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathfrak{A}_1 = \varrho \quad \text{(a)}; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{A}_1 = 0 \quad \text{(b)} \\ &\operatorname{div} \mathfrak{A}_2 = 0 \quad \text{(c)}; \quad \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{J} \quad \text{(d)}. \end{aligned} \tag{4}$$

[1] Por lo menos, debe ser de orden superior al de $r^{-\frac{3}{2}}$.

Si se encuentran soluciones para $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ que satisfagan a las condiciones en el infinito, serán las *únicas* existentes, puesto que ya hemos probado la unicidad.

$\mathfrak{A}_1$ es un vector potencial y $\mathfrak{A}_2$ uno solenoidal; vamos a comenzar por calcular el primero, $\mathfrak{A}_1$.

Según (4 *b*), y teniendo presente lo dicho en el Capítulo II, § 4, 3.°, podemos escribir

$$\mathfrak{A}_1 = -\operatorname{grad} U. \tag{5}$$

Resulta, pues, de (4 a) y (n):

$$\Delta U = -\varrho. \tag{6}$$

Una integral de esta ecuación es (véase § 3, (10)):

$$U = \int \frac{\varrho}{4\pi r}\, dS, \tag{7}$$

luego

$$\mathfrak{A}_1 = -\operatorname{grad}_p \int \frac{\varrho}{4\pi r}\, dS. \tag{8}$$

En esta fórmula se denota con grad_p la derivación respecto de las coordenadas de $p\,(x, y, z)$ que aparecen en r, en tanto que en ϱ solamente están contenidas las coordenadas del punto variable $p'\,(x', y', z')$ del volumen de integración S.

U recibe el nombre de *potencial escalar*.

Para encontrar $\mathfrak{A}_2$ ensayemos poner:

$$\mathfrak{A}_2 = \operatorname{rot} \mathfrak{B}, \tag{9}$$

siendo $\mathfrak{B}$ un nuevo vector; entonces la condición (4 c) queda satisfecha por sí misma en virtud de (1), y según (4 d) será:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{B} = \mathfrak{J}, \tag{10}$$

o bien, teniendo en cuenta (o),

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} = \Delta \mathfrak{J}. \tag{11}$$

El modo más simple de satisfacerse esta ecuación es siendo [1]

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \tag{12}$$

en cuyo caso es

$$\Delta \mathfrak{B} = -\mathfrak{J} \tag{13}$$

y

$$\mathfrak{B} = \int \frac{\mathfrak{J}}{4\pi r}\, dS \tag{14}$$

es, según lo dicho en el § 3 (10), una solución de (13).

Si ahora logramos comprobar que la div de (14) es nula, quedará probado que $\mathfrak{B}$ es también una solución de (11).

Según (14) es:

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}_p \left(\frac{\mathfrak{J}}{r}\right) dS = \frac{1}{4\pi} \int \left(\mathfrak{J}, \operatorname{grad}_p \frac{1}{r}\right) dS; \tag{15}$$

pues $\mathfrak{J}$ no depende de x, y, z, sino solamente de x', y', z'. Ahora bien; como

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

será

$$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_{p'} \frac{1}{r},$$

y, por consiguiente,

[1] Si, por un momento, suponemos dado $\mathfrak{A}_2$, la ecuación (9) determina $\mathfrak{B}$, salvo un gradiente aditivo, según (m); y la (12) determina entonces este gradiente.

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\mathfrak{J}, \operatorname{grad}_{p'}\frac{1}{r}\right)dS. \qquad (16)$$

La ecuación (s) da :

$$\left(\mathfrak{J}, \operatorname{grad}_{p'}\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div}_{p'}\frac{\mathfrak{J}}{r} - \frac{1}{r}\operatorname{div}_{p'}\mathfrak{J}. \qquad (17)$$

Sustituyendo (17) en (16) y aplicando el teorema de GAUSS resulta :

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = -\frac{1}{4\pi}\int\frac{\mathfrak{J}_n}{r}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\operatorname{div}\mathfrak{J}}{r}\,dS. \qquad (18)$$

Como $\mathfrak{A}$ debe anularse en el infinito al mismo tiempo que $\frac{1}{r^2}$, también debe ocurrirle lo mismo a $\mathfrak{J} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$ respecto de $\frac{1}{r^3}$; además, se verifica (2'), luego será :

$$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \qquad (19)$$

y, por consiguiente, (14) es una integral de (11).

La analogía de (7) y (14) hace que se dé a $\mathfrak{B}$ el nombre de *potencial vectorial*. De (9) se deduce :

$$\mathfrak{A}_2 = \operatorname{rot}_p\int\frac{\mathfrak{J}}{4\pi r}\,dS, \qquad (20)$$

es decir, nuestro vector $\mathfrak{A}_2$ aparece determinado como rotacional de otro vector, lo cual constituye la demostración ofrecida al final del Capítulo II, § 3, de que todo vector solenoidal puede representarse como rotacional de otro vector. Las ecuaciones (8) y (20) dan, teniendo presentes las (1) y (2) :

$$\mathfrak{A} = -\operatorname{grad}_p\int\frac{\operatorname{div}_{p'}\mathfrak{A}}{4\pi r}\,dS + \operatorname{rot}_p\int\frac{\operatorname{rot}_{p'}\mathfrak{A}}{4\pi r}\,dS, \qquad (21)$$

y como. según la demostración de unicidad, sólo es posible una solución para $\mathfrak{A}$, la expresión (21) representa *la* solución.

Estas consideraciones son importantes, por ejemplo, en la teoría del magnetismo ; de las líneas del campo magnético unas tienen extremos (engendradas por el magnetismo permanente) y otras son cerradas (debidas a corrientes estacionarias). La ecuación (21) expresa que los campos parciales del magnetismo permanente y de las corrientes eléctricas se superponen simplemente y muestran cómo la intensidad del campo, $\mathfrak{A}$, se calcula por medio de la densidad magnética libre, $\operatorname{div}\mathfrak{A} = \varrho$, y de la llamada corriente libre, $\operatorname{rot}\mathfrak{A} = \mathfrak{J}$.

5. Deformaciones mecánicas

Para dar una idea de la significación cinemática de los vectores considerados, vamos a estudiar primero el movimiento de un cuerpo rígido.

Supongamos que este movimiento sea una rotación en torno de un eje, con la velocidad angular $\mathfrak{w}$. Podremos representar esta velocidad por un vector cuya recta coincide con el eje y cuyo valor absoluto es $|\mathfrak{w}|$.

Tracemos por el origen, O, del vector $\mathfrak{w}$ un radio vector, $\mathfrak{r}$, que termine en el punto p ; la velocidad, $\mathfrak{v}$, de éste será :

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}], \qquad (1)$$

pues la dirección de $\mathfrak{v}$ es perpendicular al plano determinado por $\mathfrak{r}$ y $\mathfrak{w}$ y su valor absoluto es $|\mathfrak{w}|\cdot|\mathfrak{r}|\operatorname{sen}(\mathfrak{w}, \mathfrak{r}) = |\mathfrak{w}|\cdot\varrho$ (fig. 33), designando por ϱ la distancia del punto p al eje de giro.

Si el sólido tiene además un movimiento de traslación, de velocidad $\mathfrak{v}_0$, será :

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]. \qquad (2)$$

Para deducir la velocidad angular $\mathfrak{w}$ de la lineal $\mathfrak{v}$, formemos el rotacional de (2); entonces, como $\mathfrak{v}_0$ y $\mathfrak{w}$ son constantes en todo el cuerpo,

$$\text{rot } \mathfrak{v} = \text{rot } [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]; \tag{3}$$

luego, según (q),

$$\text{rot } \mathfrak{v} = \mathfrak{w} \text{ div } \mathfrak{r} - (\mathfrak{w} \text{ grad}) \mathfrak{r}. \tag{4}$$

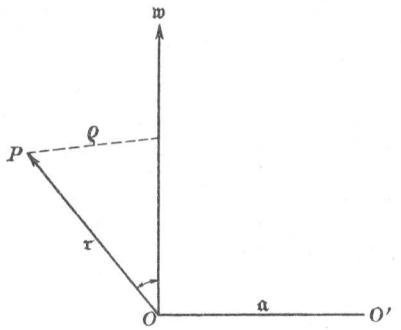

FIG. 33

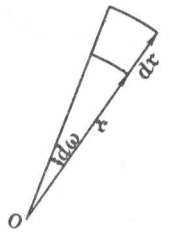

FIG. 34

Para hallar div $\mathfrak{r}$ apliquemos la definición de divergencia al tronco de cono de ángulo sólido $d\omega$ y altura dr (fig. 34). El área lateral da un valor nulo a la integral $\int \mathfrak{r}_n \, d\sigma$, en tanto que las bases dan los valores $(r \cdot r^2 d\omega)_{r+dr}$ y $-(r \cdot r^2 d\omega)_r$, respectivamente; luego

$$\text{div } \mathfrak{r} = 3.$$

Además, de la definición de $(\mathfrak{A} \text{ grad}) \mathfrak{B}$, dada en el Capítulo II, § 4, se deduce:

$$(\mathfrak{w} \text{ grad}) \mathfrak{r} = \mathfrak{w};$$

por consiguiente, es:

$$\text{rot } \mathfrak{v} = 2\mathfrak{w}. \tag{5}$$

El rotacional de la velocidad lineal es igual al duplo de la velocidad angular. Esta propiedad justifica el nombre de *rotacional* de la operación vectorial considerada.

Para deducir una interesante relación cinemática descompongamos la velocidad constante $\mathfrak{v}_0$ en dos componentes, una paralela y otra perpendicular a $\mathfrak{w}$. Para ello hacemos uso de la fórmula (h_1) y se obtiene:

$$\mathfrak{v}_0 = \frac{(\mathfrak{v}_0 \, \mathfrak{w})}{\mathfrak{w}^2} \mathfrak{w} + \left[\mathfrak{w}, \left[\frac{\mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}\right]\right] = b\mathfrak{w} + [\mathfrak{w}, \mathfrak{a}], \tag{6}$$

donde, para abreviar, hemos puesto:

$$\left[\frac{\mathfrak{v}_0, \mathfrak{w}}{\mathfrak{w}^2}\right] = \mathfrak{a}; \qquad \frac{(\mathfrak{v}_0, \mathfrak{w})}{\mathfrak{w}^2} = b.$$

Sustituyendo (6) en (2) resulta:

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{a} + \mathfrak{r}] + b\mathfrak{w}. \tag{7}$$

El primer término del segundo miembro es una rotación de velocidad angular $\mathfrak{w}$ en torno de un eje paralelo a $\mathfrak{w}$ que pasa por un punto O', el cual se obtiene aplicando en el punto O el vector $-\mathfrak{a} = OO'$ (fig. 33).

El movimiento instantáneo de un sólido puede, pues, considerarse en el caso más general, como resultante de una rotación y una traslación paralela a su eje, es decir, como un movimiento helicoidal.

Si se da el vector $\mathfrak{v}$ como vector velocidad de un cuerpo deformable, cuya divergencia no es nula, mientras que lo es su rotacional, de lo antes dicho se sigue

que las partículas no giran. Por otra parte, la integral $\int \mathfrak{v}_n \, d\sigma$ representa el volumen de materia, diferencia entre el que sale del volumen S y superficie σ en la unidad de tiempo y del que entra; si esta integral tiene un valor positivo, tiene que haber dilataciones y, como según el teorema de GAUSS, es:

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{v} \, dS = \int \mathfrak{v}_n \, d\sigma,$$

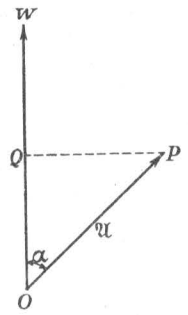

FIG. 35

div $\mathfrak{v}$ representa la dilatación de la unidad de volumen, y, por tanto, se trata de una dilatación.

En los párrafos anteriores hemos visto que todo vector $\mathfrak{v}$ puede considerarse compuesto por un vector potencial y uno solenoidal. La interpretación cinemática es que en cada momento, cualquier corrimiento puede considerarse compuesto de uno de un cuerpo rígido (un movimiento helicoidal) y una dilatación de cada elemento de volumen.

6. Sistema giratorio de referencia

Consideremos un sistema que gira con velocidad angular $\mathfrak{w}$ en torno del eje OQ (fig. 35), y sean $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ la variación del vector $\mathfrak{A}$ respecto del tiempo en el sistema en reposo, y $\frac{d'\mathfrak{A}}{dt}$ la misma variación cuando el sistema gira. Por ser $QP = |\mathfrak{A}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$ y $|\mathfrak{w}| = \frac{d\varphi}{dt}$ (designando

por $d\varphi$ el ángulo descrito por QP en el tiempo dt), el punto P habrá recorrido en la unidad de tiempo el camino $QP \cdot \frac{d\varphi}{dt} = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{w}| \operatorname{sen} \alpha$; pero éste es, en magnitud y dirección, precisamente el vector $[\mathfrak{w}, \mathfrak{A}]$; luego se verifica la relación:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d'\mathfrak{A}}{dt} + [\mathfrak{w}, \mathfrak{A}]. \tag{1}$$

Si se trata de un campo vectorial, $\mathfrak{A}$, podemos sustituir $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ por su valor dado en el Capítulo II, § 7, (2), y eliminando $\mathfrak{w}$ por medio de (5), § 5, resulta:

$$\frac{d'\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{A} - \frac{1}{2} [\operatorname{rot} \mathfrak{v}, \mathfrak{A}]. \tag{2}$$

Comparemos, por último, la aceleración de un punto material, m, apreciada en el sistema en rotación, con la que tiene en el sistema en reposo.

Sea $\mathfrak{v}_0$ la velocidad del punto en el sistema que gira; la misma velocidad apreciada en el sistema en reposo será (véase § 5, (2)):

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}], \tag{3}$$

y, por tanto, la aceleración:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} + \left[\mathfrak{w}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} + [\mathfrak{w}, \mathfrak{v}], \tag{4}$$

pues $\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$. Sustituyendo el valor de $\mathfrak{v}$ dado por (3) en (4) resulta:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}+[\mathfrak{w},\mathfrak{v}_0]+\big[\mathfrak{w}\,[\mathfrak{w},\mathfrak{r}]\big],$$

o bien, aplicando (h) al último término:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}+[\mathfrak{w},\mathfrak{v}_0]+\mathfrak{w}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{w})-\mathfrak{r}\mathfrak{w}^2. \qquad (5)$$

Por último, aplicando (1) al vector $\mathfrak{v}_0$ se obtiene:

$$\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt}=\frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt}+[\mathfrak{w},\mathfrak{v}_0],$$

relación que transforma la (5) en esta otra:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt}+2\,[\mathfrak{w},\mathfrak{v}_0]+\mathfrak{w}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{w})-\mathfrak{r}\mathfrak{w}^2. \qquad (6)$$

Esta ecuación da la relación buscada. Multiplicando sus dos miembros por m, masa del punto material móvil, el primer miembro da, según la ley de NEWTON, el valor de la fuerza $\mathfrak{F}$, pues esta ley es aplicable al sistema en reposo; por consiguiente:

$$m\frac{d'\mathfrak{v}_0}{dt}=\mathfrak{F}+m\mathfrak{r}\mathfrak{w}^2-m\mathfrak{w}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{w})-2m\,[\mathfrak{w},\mathfrak{v}_0]. \qquad (7)$$

Resulta, pues, que la ley de NEWTON es también aplicable a los sistemas que giran, sin más que agregar a la fuerza real $\mathfrak{F}$ la *fuerza centrífuga* $m\mathfrak{r}\mathfrak{w}^2-m\mathfrak{w}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{w})$ y la *fuerza de* CORIOLIS $-2m\,[\mathfrak{w},\mathfrak{v}_0]$.

Si el vector $\mathfrak{w}$ coincide con el eje z, de modo que sus componentes son 0, 0, $|\mathfrak{w}|$, y x, y, z son las de $\mathfrak{r}$, las componentes de la fuerza centrífuga toman la forma bien conocida $m\mathfrak{w}^2x$, $m\mathfrak{w}^2y$, 0.

CAPÍTULO IV

Tensores

1. Funciones vectoriales lineales; definición y representación geométrica de un tensor

Supongamos dadas en el espacio tres direcciones a, b, c, perpendiculares entre sí, y tres valores numéricos cualesquiera π_a, π_b, π_c, y que existe un vector $\mathfrak{A}$. Diremos entonces que $\mathfrak{B}$ es una función vectorial lineal de $\mathfrak{A}$ si se verifican las relaciones:

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_a&=\pi_a\mathfrak{A}_a,\\ \mathfrak{B}_b&=\pi_b\mathfrak{A}_b,\\ \mathfrak{B}_c&=\pi_c\mathfrak{A}_c,\end{aligned} \qquad (1)$$

en las que $\mathfrak{A}_a$ y $\mathfrak{B}_a$ son las componentes en la dirección a de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, respectivamente. Estas tres igualdades pueden expresarse por medio de una sola, así:

$$\mathfrak{B}=(\pi)\,\mathfrak{A}. \qquad (2)$$

De esta misma definición se sigue que el vector $\mathfrak{B}$ es completamente independiente de todo sistema de coordenadas.

Cuando son $\pi_a=\pi_b=\pi_c=\pi$, la ecuación (2) se transforma en esta otra:

$$\mathfrak{B}=\pi\mathfrak{A}. \qquad (3)$$

Puede, pues, considerarse la operación representada por la ecuación (2) como una generalización de la multiplicación de un vector por un escalar.

La diferencia más esencial entre la función lineal constituída por (2) y la multiplicación representada por (3) es que en el último caso el vector resultante, $\mathfrak{B}$, tiene la misma dirección de $\mathfrak{A}$, mientras que en el primer caso $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ forman en general un cierto ángulo entre sí.

Así, por ejemplo, la inducción eléctrica $\mathfrak{D}$, en un cuerpo isotropo, es proporcional a la intensidad de campo $\mathfrak{E}$,

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\, \mathfrak{E}, \tag{4}$$

siendo ε la constante dieléctrica del medio. En cambio, en un cristal se obtiene $\mathfrak{D}$ proyectando $\mathfrak{E}$ sobre tres rectas fijas en el cristal, a, b, c, perpendiculares entre sí, llamadas ejes principales del cristal, y multiplicando las proyecciones por las constantes dieléctricas principales ε_a, ε_b, ε_c, de modo que son

$$\mathfrak{D}_a = \varepsilon_a \mathfrak{E}_a\,; \quad \mathfrak{D}_b = \varepsilon_b \mathfrak{E}_b\,; \quad \mathfrak{D}_c = \varepsilon_c \mathfrak{E}_c, \tag{5}$$

o bien,

$$\mathfrak{D} = (\varepsilon)\, \mathfrak{E}. \tag{6}$$

Así, pues, mientras que en los medios isotropos la inducción eléctrica tiene siempre la misma dirección de la intensidad del campo, en los cristales no ocurre lo mismo, en general.

El conjunto de las tres direcciones a, b, c y los parámetros correspondientes ε_a, ε_b, ε_c recibe el nombre de *tensor*, y, en particular, si las direcciones a, b, c son perpendiculares entre sí, *tensor simétrico u ortogonal*. En lo que sigue nos limitaremos a considerar tensores simétricos.

Ejemplos de tales tensores son las tensiones de un cuerpo elástico, y las conductibilidades térmica y eléctrica de un cristal.

Un tensor está determinado por el conocimiento de seis parámetros. En efecto: para dar la dirección a en el espacio son precisos dos; una vez fijada la dirección a, la b queda determinada en un plano perpendicular a la a por otro parámetro; con esto queda ya determinada la dirección c, siempre que se haya convenido que las tres direcciones a, b, c constituyan un sistema directo, y ya sólo falta el conocimiento de los tres números π_a, π_b, π_c para que quede determinado el tensor, que resulta, por tanto, conocido al dar seis datos numéricos.

Las direcciones a, b, c pueden darse de una manera simétrica respecto de un sistema cartesiano rectangular, por medio de sus cosenos directores respecto de los ejes x, y, z, como indica el siguiente esquema:

	x	y	z
a	α_1	α_2	α_3
b	β_1	β_2	β_3
c	γ_1	γ_2	γ_3

(7)

en el cual se indica que el coseno del ángulo formado por a y x es α_1, etc.

Las magnitudes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_3$ no son independientes entre sí, sino que satisfacen a las conocidas seis relaciones, independientes unas de otras, que existen entre los cosenos directores de los ejes de dos sistemas cartesianos rectangulares, de modo que, en realidad, sólo hay en (7) tres magnitudes independientes, precisamente el mismo número que antes indicábamos al fijar las direcciones a, b, c.

Según el esquema (7) se verifica :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_a &= \mathfrak{A}_x \alpha_1 + \mathfrak{A}_y \alpha_2 + \mathfrak{A}_z \alpha_3, \\ \mathfrak{A}_b &= \mathfrak{A}_x \beta_1 + \mathfrak{A}_y \beta_2 + \mathfrak{A}_z \beta_3, \\ \mathfrak{A}_c &= \mathfrak{A}_x \gamma_1 + \mathfrak{A}_y \gamma_2 + \mathfrak{A}_z \gamma_3 ; \end{aligned} \tag{8}$$

y, por tanto, teniendo en cuenta (1) resulta :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_a &= \pi_a (\mathfrak{A}_x \alpha_1 + \mathfrak{A}_y \alpha_2 + \mathfrak{A}_z \alpha_3), \\ \mathfrak{B}_b &= \pi_b (\mathfrak{A}_x \beta_1 + \mathfrak{A}_y \beta_2 + \mathfrak{A}_z \beta_3), \\ \mathfrak{B}_c &= \pi_c (\mathfrak{A}_x \gamma_1 + \mathfrak{A}_y \gamma_2 + \mathfrak{A}_z \gamma_3) . \end{aligned} \tag{9}$$

Multiplicando las tres ecuaciones (9) por α_1, β_1, γ_1, respectivamente, y sumando los resultados, se obtiene, según (7) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x = {} & \mathfrak{A}_x (\pi_a \alpha_1^2 + \pi_b \beta_1^2 + \pi_c \gamma_1^2) \\ & + \mathfrak{A}_y (\pi_a \alpha_1 \alpha_2 + \pi_b \beta_1 \beta_2 + \pi_c \gamma_1 \gamma_2) \\ & + \mathfrak{A}_z (\pi_a \alpha_1 \alpha_2 + \pi_b \beta_1 \beta_3 + \pi_c \gamma_1 \gamma_3) , \end{aligned}$$

y de modo análogo :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_y = {} & \mathfrak{A}_x (\pi_a \alpha_2 \alpha_1 + \pi_b \beta_2 \beta_1 + \pi_c \gamma_2 \gamma_1) \\ & + \mathfrak{A}_y (\pi_a \alpha_2^2 + \pi_b \beta_2^2 + \pi_c \gamma_2^2) \\ & + \mathfrak{A}_z (\pi_a \alpha_2 \alpha_3 + \pi_b \beta_2 \beta_3 + \pi_c \gamma_2 \gamma_3), \\ \mathfrak{B}_z = {} & \mathfrak{A}_x (\pi_a \alpha_3 \alpha_1 + \pi_b \beta_3 \beta_1 + \pi_c \gamma_3 \gamma_1) \\ & + \mathfrak{A}_y (\pi_a \alpha_3 \alpha_2 + \pi_b \beta_3 \beta_2 + \pi_c \gamma_3 \gamma_2) \\ & + \mathfrak{A}_z \pi_a \alpha_3^2 + \pi_b \beta_3^2 + \pi_c \gamma_3^2), \end{aligned} \tag{10}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \pi_{xx} \mathfrak{A}_x + \pi_{xy} \mathfrak{A}_y + \pi_{xz} \mathfrak{A}_z, \\ \mathfrak{B}_y &= \pi_{yx} \mathfrak{A}_x + \pi_{yy} \mathfrak{A}_y + \pi_{yz} \mathfrak{A}_z, \\ \mathfrak{B}_z &= \pi_{zx} \mathfrak{A}_x + \pi_{zy} \mathfrak{A}_y + \pi_{zz} \mathfrak{A}_z, \end{aligned} \tag{11}$$

si se pone :

$$\begin{aligned} \pi_{xx} &= \pi_a \alpha_1^2 + \pi_b \beta_1^2 + \pi_c \gamma_1^2, \\ \pi_{yy} &= \pi_a \alpha_2^2 + \pi_b \beta_2^2 + \pi_c \gamma_2^2, \\ \pi_{zz} &= \pi_a \alpha_3^2 + \pi_b \beta_3^2 + \pi_c \gamma_3^2, \\ \pi_{yz} &= \pi_{zy} = \pi_a \alpha_2 \alpha_3 + \pi_b \beta_2 \beta_3 + \pi_c \gamma_2 \gamma_3, \\ \pi_{zx} &= \pi_{xz} = \pi_a \alpha_3 \alpha_1 + \pi_b \beta_3 \beta_1 + \pi_c \gamma_3 \gamma_1, \\ \pi_{xy} &= \pi_{yx} = \pi_a \alpha_1 \alpha_2 + \pi_b \beta_1 \beta_2 + \pi_c \gamma_1 \gamma_2 . \end{aligned} \tag{12}$$

El producto escalar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}, (\pi)\, \mathfrak{A})$ tiene el valor, independiente del sistema coordenado :

$$(\mathfrak{A}, (\pi)\, \mathfrak{A}) = \pi_{xx} \mathfrak{A}_x^2 + \pi_{yy} \mathfrak{A}_y^2 + \pi_{zz} \mathfrak{A}_z^2 + 2\pi_{yz} \mathfrak{A}_y \mathfrak{A}_z + \ldots \tag{13}$$

Sustituyamos el vector $\mathfrak{A}$ por el segmento de unión, r, de un punto fijo, O, con el punto variable P, y tomemos O como origen de un sistema cartesiano en el que P tiene las coordenadas x, y, z ; tendremos entonces, en virtud de (13) :

$$(\mathfrak{r}, (\pi)\, \mathfrak{r}) = \pi_{xx} x^2 + \pi_{yy} y^2 + \pi_{zz} z^2 + 2\pi_{yz} yz + \ldots \tag{14}$$

El lugar geométrico de todos los puntos P para los cuales se verifica

$$(\mathfrak{r}, (\pi)\, \mathfrak{r}) = 1, \tag{15}$$

es la cuádrica con centro:

$$2\Phi(x, y, z) = \pi_{xx} x^2 + \pi_{yy} y^2 + \pi_{zz} z^2 + 2\pi_{yz} yz + \ldots - 1 = 0. \tag{16}$$

Puede presentarse el caso, para valores dados de los números π, que la superficie Φ (2) no tenga ningún punto real ; entonces es real la superficie

$$(\mathfrak{r}, (\pi)\, \mathfrak{r}) = -1, \tag{15'}$$

o sea :

$$2\Phi(x, y, z) = \pi_{xx} x^2 = \ldots + 1 = 0. \tag{16'}$$

En muchos casos la naturaleza física de un tensor es tal que permite asegurar que la cuádrica $\Phi^{(2)}$ que le caracteriza es un elipsoide ; por esta razón, siempre que no haya lugar a confusión, hablaremos simplemente del *elipsoide del tensor*, aun cuando no sea seguro que la $\Phi^{2)}$ represente un elipsoide.

El *elipsoide del tensor* determinado por cualquiera de las ecuaciones (16) o (16′) es independiente del sistema de coordenadas y puede tomarse directamente como representante del tensor π.

Vamos ahora a calcular el valor del producto escalar $(\mathfrak{A}, (\pi)\,\mathfrak{A})$, conforme está dado por la ecuación (13), cuando se refiere a otro sistema de coordenadas x', y', z', a fin de conocer las fórmulas de transformación de los π al cambiar de sistema de coordenadas.

Supongamos que los cosenos directores de los dos sistemas x, y, z y x', y', z' son los indicados en el esquema

	x	y	z
x'	ζ_1	η_1	ϑ_1
y'	ζ_2	η_2	ϑ_2
z'	ζ_3	η_3	ϑ_3

(17)

tendremos entonces :

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_x &= \mathfrak{A}_{x'}\zeta_1 + \mathfrak{A}_{y'}\zeta_2 + \mathfrak{A}_{z'}\zeta_3,\\ \mathfrak{A}_y &= \mathfrak{A}_{x'}\eta_1 + \mathfrak{A}_{y'}\eta_2 + \mathfrak{A}_{z'}\eta_3,\\ \mathfrak{A}_z &= \mathfrak{A}_{x'}\vartheta_1 + \mathfrak{A}_{y'}\vartheta_2 + \mathfrak{A}_{z'}\vartheta_3.\end{aligned} \tag{18}$$

Sustituyendo estos valores en (13) se obtiene una ecuación de la forma :

$$(\mathfrak{A}\,(\pi)\,\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}', (\pi')\,\mathfrak{A}') = \pi_{x'x'}\mathfrak{A}_{x'}^2 + \pi_{y'y'}\mathfrak{A}_{y'}^2 + \pi_{z'z'}\mathfrak{A}_{z'}^2 + 2\,\pi_{y'z'}\mathfrak{A}_{y'}\mathfrak{A}_{z'} + \dots, \tag{19}$$

si se pone :

$$\begin{aligned}\pi_{x'x'} &= \zeta_1^2\pi_{xx} + \eta_1^2\pi_{yy} + \vartheta_1^2\pi_{zz} + 2\,\eta_1\vartheta_1\pi_{yz} + 2\,\vartheta_1\zeta_1\pi_{zx} + 2\,\zeta_1\eta_1\pi_{xy},\\ \pi_{y'y'} &= \zeta_2^2\pi_{xx} + \eta_2^2\pi_{yy} + \vartheta_2^2\pi_{zz} + 2\,\eta_2\vartheta_2\pi_{yz} + 2\,\vartheta_2\zeta_2\pi_{zx} + 2\,\zeta_2\eta_2\pi_{xy},\\ \pi_{z'z'} &= \zeta_3^2\pi_{xx} + \eta_3^2\pi_{yy} + \vartheta_3^2\pi_{zz} + 2\,\eta_3\vartheta_3\pi_{yz} + 2\,\vartheta_3\zeta_3\pi_{zx} + 2\,\zeta_3\eta_3\pi_{xy},\\ \pi_{y'z'} &= \zeta_2\zeta_3\pi_{xx} + \eta_2\eta_3\pi_{yy} + \vartheta_2\vartheta_3\pi_{zz} + (\eta_2\vartheta_3 + \eta_3\vartheta_2)\pi_{yz} + (\vartheta_2\zeta_3 + \vartheta_3\zeta_2)\pi_{zx} + (\zeta_2\eta_3 + \zeta_3\eta_2)\pi_{xy},\\ \pi_{z'x'} &= \zeta_3\zeta_1\pi_{xx} + \eta_3\eta_1\pi_{yy} + \vartheta_3\vartheta_1\pi_{zz} + (\eta_3\vartheta_1 + \eta_1\vartheta_3)\pi_{yz} + (\vartheta_3\zeta_1 + \vartheta_1\zeta_3) + \pi_{zx}(\zeta_3\eta_1 + \zeta_1\eta_3)\pi_{xy},\\ \pi_{x'y'} &= \zeta_1\zeta_2\pi_{xx} + \eta_1\eta_2\pi_{yy} + \vartheta_1\vartheta_2\pi_{zz} + (\eta_1\vartheta_2 + \eta_2\vartheta_1)\pi_{yz} + \vartheta_1\zeta_2 + \vartheta_2\zeta_1)\pi_{zx} + (\zeta_1\eta_2 + \zeta_2\eta_1)\pi_{xy}.\end{aligned} \tag{20}$$

Sumando ahora las tres primeras ecuaciones (20) y aplicando las propiedades de ortogonalidad de los coeficientes, se obtiene :

$$J_1 = \pi_{xx} + \pi_{yy} + \pi_{zz} = \pi_{x'x'} + \pi_{y'y'} + \pi_{z'z'}, \tag{21}$$

lo cual demuestra que *la suma de las magnitudes π de índices iguales es invariante respecto de toda transformación de coordenadas.*

También puede establecerse la invariancia de

$$J_2 = \pi_{yy}\pi_{zz} + \pi_{zz}\pi_{xx} + \pi_{xx}\pi_{yy} - (\pi_{yz}^2 + \pi_{zx}^2 + \pi_{xy}^2) \tag{21 a}$$

así como de

$$J_3 = \begin{vmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} \end{vmatrix} \tag{21 b}$$

lo cual se consigue, ya por sustitución directa, o también, observando que J_1, J_2, J_3 son los coeficientes de la ecuación cúbica en λ

$$\Delta = \begin{vmatrix} \pi_{xx} - \lambda & \pi_{xy} & \pi_{xz} \\ \pi_{yx} & \pi_{yy} - \lambda & \pi_{yz} \\ \pi_{zx} & \pi_{zy} & \pi_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de la cual dependen, como se muestra en Geometría, los ejes del elipsoide del tensor; las J son, pues, funciones simétricas de las raíces λ_1, λ_2, λ_3 que pueden ser definidas de manera puramente geométrica, independientemente del sistema de coordenadas, y, por consiguiente, son invariantes.

Cuando, recíprocamente, se quieren expresar los π_{xx},... en función de los $\pi_{x'x'}$,..., en lugar del sistema (18) se forma este otro:

$$\mathfrak{A}_{x'} = \mathfrak{A}_x \zeta_1 + \mathfrak{A}_y \eta_1 + \mathfrak{A}_z \vartheta_1 \qquad (22)$$

y se sustituyen los valores obtenidos en la ecuación (19). Se obtiene así:

$$\begin{aligned}
\pi_{xx} &= \zeta_1^2 \pi_{x'x'} + \zeta_2^2 \pi_{y'y'} + \zeta_3^2 \pi_{z'z'} + 2\zeta_2\zeta_3 \pi_{y'z'} + 2\zeta_3\zeta_1 \pi_{z'x'} \\
&\quad + 2\zeta_1\zeta_2 \pi_{x'y'}, \\
\pi_{yy} &= \eta_1^2 \pi_{x'x'} + \eta_2^2 \pi_{y'y'} + \eta_3^2 \pi_{z'z'} + 2\eta_2\eta_3 \pi_{y'z'} + 2\eta_3\eta_1 \pi_{z'x'} \\
&\quad + 2\eta_1\eta_2 \pi_{x'y'}, \\
\pi_{zz} &= \vartheta_1^2 \pi_{x'x'} + \vartheta_2^2 \pi_{y'y'} + \vartheta_3^2 \pi_{z'z'} + 2\vartheta_2\vartheta_3 \pi_{y'z'} + 2\vartheta_3\vartheta_1 \pi_{z'x'} \\
&\quad + 2\vartheta_1\vartheta_2 \pi_{x'y'}, \qquad (23) \\
\pi_{yz} &= \eta_1\vartheta_1 \pi_{x'x'} + \eta_2\vartheta_2 \pi_{y'y'} + \eta_3\vartheta_3 \pi_{z'z'} + (\eta_2\vartheta_3 + \eta_3\vartheta_2)\pi_{y'z'} \\
&\quad + (\eta_3\vartheta_1 = \eta_1\vartheta_3)\pi_{z'x'} + (\eta_1\vartheta_2 + \eta_2\vartheta_1)\pi_{x'y'}, \\
\pi_{zx} &= \vartheta_1\zeta_1 \pi_{x'x'} + \vartheta_2\zeta_2 \pi_{y'y'} + \vartheta_3\zeta_3 \pi_{z'z'} + (\vartheta_2\zeta_3 + \vartheta_3\zeta_2)\pi_{y'z'} \\
&\quad + (\vartheta_3\zeta_1 + \vartheta_1\zeta_3)\pi_{z'x'} + (\vartheta_1\zeta_2 + \vartheta_2\zeta_1)\pi_{x'y'}, \\
\pi_{xy} &= \zeta_1\eta_1 \pi_{x'x'} + \zeta_2\eta_2 \pi_{y'y'} + \zeta_3\eta_3 \pi_{z'z'} + (\zeta_2\eta_3 + \zeta_3\eta_2)\pi_{y'z'} \\
&\quad + (\zeta_3\eta_1 + \zeta_1\eta_3)\pi_{z'x'} + (\zeta_1\eta_2 + \zeta_3\eta_1)\pi_{x'y'}.
\end{aligned}$$

Se sabe, por Geometría analítica, que sólo existe una transformación de coordenadas (aparte el cambio de orden en la sucesión de los ejes) que haga referir el elipsoide del tensor a sus ejes. Estos coinciden con las direcciones a, b, c, pues para éstas se verifica según (1):

$$\mathfrak{B}_a = \pi_a \mathfrak{A}_a; \quad \mathfrak{B}_b = \pi_b \mathfrak{A}_b; \quad \mathfrak{B}_c = \pi_c \mathfrak{A}_c,$$

y, por tanto, es:

$$(\mathfrak{A}, (\pi)\,\mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \pi_a \mathfrak{A}_a + \pi_b \mathfrak{A}_b^2 + \pi_c \mathfrak{A}_c^2. \qquad (24)$$

Formando ahora, como antes hicimos, $(\mathfrak{r}, (\pi)\,\mathfrak{r})$, sustituyendo $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{r}$ en (24) y designando por X, Y, Z las componentes de $\mathfrak{r}$ respecto de un sistema cartesiano cuyos ejes son paralelos a las direcciones a, b, c, se obtiene la ecuación del elipsoide del tensor en la forma

$$\pi_a X^2 + \pi_b Y^2 + \pi_c Z^2 - 1 = 0. \qquad (25)$$

Los semiejes de este elipsoide tienen, pues, las direcciones de a, b, c y sus magnitudes respectivas son:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi_a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi_b}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi_c}}. \qquad (26)$$

Con esto queda ya determinado el elipsoide por medio del tensor π y, recíprocamente, el tensor por su elipsoide correspondiente.

Además se deduce de (25) que el valor del invariante J_1 dado por (21) es:

$$J_1 = \pi_{xx} + \pi_{yy} + \pi_{zz} = \pi_a + \pi_b + \pi_c. \qquad (27)$$

En seguida, la misma ecuación (25) permite reconocer que, cuando el sistema de coordenadas coincide con el de los ejes del elipsoide, son:

$$\pi_{yz} = \pi_{zx} = \pi_{xy} = 0 \qquad (28)$$

y, por tanto,

$$J_2 = \pi_b \pi_c + \pi_c \pi_a + \pi_a \pi_b, \qquad (27\,a)$$

$$J_3 = \pi_a \pi_b \pi_c; \qquad (27\,b)$$

y la ecuación $\Delta = 0$ demuestra que π_a, π_b, π_c son, precisamente, las magnitudes λ_1, λ_2, λ_3.

Si el vector $\mathfrak{A}$ tiene la dirección de uno de los ejes del elipsoide, el vector $\mathfrak{B} = (\pi)\,\mathfrak{A}$ es paralelo al $\mathfrak{A}$, como se deduce de (1), mientras que, en general, $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tienen direcciones diferentes.

Los números π_a, π_b, π_c reciben el nombre de valores principales del tensor π.

Veamos ahora cómo puede deducirse geométricamente el vector $\mathfrak{B}$ del vector $\mathfrak{A}$, valiéndose del elipsoide del tensor.

La ecuación del plano tangente a la superficie $2\Phi = 0$ en el punto $P\,(x, y, z)$ es, cuando se designan por ξ, η, ζ las coordenadas generales de un punto del plano:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x - \xi) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(y - \eta) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z - \zeta) = 0\,; \qquad (29)$$

pero como, según (16), es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,z = 1, \qquad (30)$$

tendremos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\xi + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\zeta = 1. \qquad (31)$$

De la inspección de esta ecuación se deduce que la perpendicular al plano tangente trazada por el centro

del elipsoide, OQ (fig. 36), forma con los ejes coordenados ángulos dados por las ecuaciones:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad (32)$$

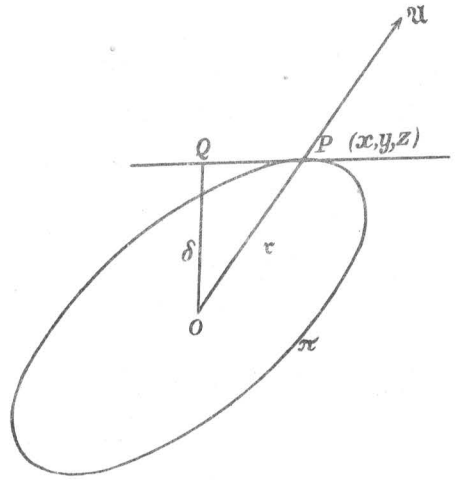

FIG. 36

o bien, sustituyendo $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ por sus valores deducidos de (16)

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (\pi_{xx}x + \pi_{xy}y + \pi_{xz}z):$$
$$:(\pi_{yx}x + \pi_{yy}y + \pi_{yz}z) : (\pi_{zx}x + \pi_{zy}y + \pi_{zz}z). \qquad (33)$$

Consideremos ahora, en particular, el punto P (x, y, z) en que el vector $\mathfrak{A}$ aplicado al centro O, o la prolongación de tal vector, corta al elipsoide; tendremos entonces:

$$x : y : z = \mathfrak{A}_x : \mathfrak{A}_y : \mathfrak{A}_z\,; \qquad (34)$$

luego de (33), teniendo en cuenta (11), se sigue :

$$\mathfrak{B}_x : \mathfrak{B}_y : \mathfrak{B}_z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma, \tag{35}$$

es decir, que el vector $\mathfrak{B}$ tiene la misma dirección de la normal trazada por el centro del elipsoide al plano tangente en P.

Poniendo la ecuación del plano tangente (31) en la forma normal, se ve que la longitud, δ, de la distancia OQ es :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}; \tag{36}$$

ahora bien, representando por $\mathfrak{r}$ el radio vector OP, trazado desde O al elipsoide en la dirección de $\mathfrak{A}$, se tiene, según (11) :

$$\mathfrak{B}_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{|\mathfrak{A}|}{|\mathfrak{r}|}, \ldots \tag{37}$$

por tanto,

$$|\mathfrak{B}| = \frac{|\mathfrak{A}|}{\delta\,|\mathfrak{r}|}, \tag{38}$$

es decir, el valor absoluto de $\mathfrak{B}$ se deduce del de $\mathfrak{A}$.

Resolviendo las ecuaciones (11) respecto de las componentes de $\mathfrak{A}$, se obtiene :

$$\mathfrak{A} = (\varrho)\,\mathfrak{B}, \tag{39}$$

y también, según una conocida propiedad de Algebra, son $\varrho_{ik} = \varrho_{ki}$ cuando $\pi_{ik} = \pi_{ki}$.

Para expresar que los números ϱ tienen con los π la relación sencilla conocida por la teoría de las ecuaciones lineales, utilizaremos el símbolo, de uso frecuente en la teoría de las sustituciones lineales,

$$\mathfrak{A} = (\pi)^{-1}\,\mathfrak{B}. \tag{39'}$$

Cuando se conoce el elipsoide π se puede construir el ϱ o $(\pi)^{-1}$ fácilmente. Para ello, imaginemos escritas las ecuaciones (11) cuando el sistema de coordenadas coincida con el de los ejes del elipsoide; por consiguiente :

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{x'} &= \pi'_{x'x'}\,\mathfrak{A}_{x'}, \\ \mathfrak{B}_{y'} &= \pi'_{y'y'}\,\mathfrak{A}_{y'}, \\ \mathfrak{B}_{z'} &= \pi'_{z'z'}\,\mathfrak{A}_{z'}, \end{aligned} \tag{40}$$

y de estas ecuaciones se sigue :

$$\mathfrak{A}_{x'} = \frac{1}{\pi'_{x'x'}}\,\mathfrak{B}_{x'}, \text{ etc.} \tag{41}$$

Los ejes del elipsoide $(\pi)^{-1}$ tienen, pues, las mismas direcciones que los del elipsoide π y las longitudes de los primeros son de valores recíprocos de los del segundo.

En el caso particular de ser el elipsoide una esfera, es decir, si en cualquier sistema coordenado son $\pi_{xx} = \pi_{yy} = \pi_{zz}$; $\pi_{yz} = \pi_{zx} = \pi_{xy} = 0$, la función vectorial lineal se transforma en la multiplicación de un vector por un escalar, y así, en tanto en cuanto un elipsoide puede considerarse como una generalización de una esfera, puede un tensor considerarse como una generalización de un escalar, como al principio de este parágrafo habíamos indicado.

2. Tensores especiales. Elipsoide de inercia. El movimiento del peón

Si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son dos vectores, la ecuación

$$(\mathfrak{A}_x x + \mathfrak{A}_y y + \mathfrak{A}_z z)(\mathfrak{B}_x x + \mathfrak{B}_y y + \mathfrak{B}_z z) = 1 \qquad (1)$$

representa un cilindro hiperbólico, cuyos planos asintóticos son los de ecuaciones:

$$\mathfrak{A}_x x + \mathfrak{A}_y y + \mathfrak{A}_z z = 0, \qquad \mathfrak{B}_x x + \mathfrak{B}_y y + \mathfrak{B}_z z = 0,$$

planos que son los perpendiculares a aquellos vectores trazados por el origen de coordenadas.

Comparando la ecuación (1) con la (16) del parágrafo anterior, vemos que define un tensor,

$$\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x,\ \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y,\ \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z,\ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y), \ldots$$

al cual representaremos por la notación

$$\text{tens}\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), \quad \text{que se lee: tensor } \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}.$$

Si, en particular, es

$$\mathfrak{B} = b\,\mathfrak{A},$$

siendo b un escalar, será:

$$\text{tens}\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = b\ \text{tens}\ \mathfrak{A}^2,$$

estando dado $\mathfrak{A}^2$ por

$$\mathfrak{A}_x^2,\ \mathfrak{A}_y^2,\ \mathfrak{A}_z^2,\ \mathfrak{A}_y \mathfrak{A}_z,\ \mathfrak{A}_z \mathfrak{A}_x,\ \mathfrak{A}_x \mathfrak{A}_y.$$

Naturalmente, el producto escalar de $\mathfrak{B}$ y $(\pi)\,\mathfrak{A}$ es independiente del sistema de coordenadas; se obtiene su valor multiplicando los valores correspondientes de los

parámetros que determinan los tensores π y tens $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, duplicando los que se derivan de parámetros de índices desiguales y sumando todos los productos así obtenidos. Habrá, pues, que multiplicar, por ejemplo, π_{xx} por $\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x$; multiplicar también π_{yz} por $\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y)$ y duplicar este término, con lo que se obtendrá $\pi_{yz}(\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y)$.

Representaremos esta operación simplemente por $(\pi, \text{tens}\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}))$, con lo cual podremos escribir la igualdad

$$\big((\pi)\,\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\big) = (\pi, \text{tens}\ (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\big). \qquad (2)$$

Elipsoide de inercia

Cuando un sólido gira alrededor de un eje fijo, su energía cinética T está dada, según lo dicho en el Capítulo III, § 5 (1), por la expresión:

$$2T = \Sigma m v^2 = \Sigma m [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]^2, \qquad (3)$$

o también, designando por ϱ la distancia de un punto material al eje,

$$\varrho = |\mathfrak{r}| \operatorname{sen} (\mathfrak{w}, \mathfrak{r}),$$

por esta otra:

$$2T = \mathfrak{w}^2 \Sigma m \varrho^2 = K \mathfrak{w}^2. \qquad (4)$$

El producto $K = \Sigma m \varrho^2$ se llama momento de inercia del cuerpo respecto del eje considerado.

Se tiene:

$$\begin{aligned}[\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]^2 &= \mathfrak{w}^2 \mathfrak{r}^2 \operatorname{sen}^2 (\mathfrak{w}, \mathfrak{r}) = \mathfrak{w}^2 \mathfrak{r}^2 (1 - \cos^2 (\mathfrak{w}, \mathfrak{r})) \\ &= \mathfrak{w}^2 \mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{w}, \mathfrak{r})^2; \end{aligned} \qquad (5)$$

luego la expresión (3) de la energía tomará en coordenadas cartesianas esta otra forma:

$$\begin{aligned} 2T &= K_{11} \mathfrak{w}_x^2 + K_{22} \mathfrak{w}_y^2 + K_{33} \mathfrak{w}_z^2 + 2K_{23}\, \mathfrak{w}_y \mathfrak{w}_z + \ldots \\ &= (K, \text{tens}\ \mathfrak{w}^2), \end{aligned} \qquad (6)$$

donde $K_{11} = \Sigma m\,(y^2 + z^2)$ representa el momento de inercia respecto del eje x (4) y K_{12}, K_{13}, K_{23} son los llamados momentos de desviación (1), cuyo valor es:

$$K_{12} = -\Sigma mxy\,.$$

Igualando los segundos miembros de (6) y (4) resulta que el momento de inercia, K, respecto de un eje cualquiera está con el radio vector del elipsoide de inercia,

$$K_{11}x^2 + K_{22}y^2 + K_{33}z^2 + 2K_{23}yz + \ldots = 1, \qquad (7)$$

paralelo a dicho eje, en la relación dada por la igualdad:

$$K\mathfrak{r}^2 = 1, \qquad (8)$$

que se deduce multiplicando la

$$K\mathfrak{w}^2 = K_{11}\mathfrak{w}_x^2 + K_{22}\mathfrak{w}_y^2 + \ldots$$

por $\dfrac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{w}^2}$ y teniendo en cuenta la (7). La ecuación (8) permite obtener inmediatamente el momento de inercia respecto de un radio vector del elipsoide de inercia como eje, conocido el valor del radio vector.

Movimiento del peón

Si designamos por m la masa de un punto cualquiera de un sólido, por $\mathfrak{f}$ la fuerza que sobre él actúa y por $\delta\mathfrak{s}$ una traslación virtual, el principio de d'ALEMBERT dice que el trabajo virtual de las fuerzas perdidas es nulo, entendiendo por fuerza perdida $\mathfrak{f} - m\dfrac{d\mathfrak{v}}{dt}$. Se tiene, pues:

$$\Sigma\left(\mathfrak{f} - m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, \delta\mathfrak{s}\right) = 0. \qquad (9)$$

(1) En España suelen llamarse *productos de inercia* o *momentos rectangulares*. — *(N. del T.)*.

Supongamos ahora que un punto O, del cuerpo quede fijo y sea $\mathfrak{r}$ el radio vector que va desde O a un punto material del sólido; tendremos (Cap. III, § 5 (1)):

$$\delta\mathfrak{s} = [\delta\mathfrak{u}, \mathfrak{r}], \qquad (10)$$

en cuya expresión $\delta\mathfrak{u}$ representa una rotación virtual del cuerpo. Sustituyendo (10) en (9) y observando que $\delta\mathfrak{u}$ tiene el mismo valor para todos los puntos materiales del sólido, se obtiene como ecuación del movimiento:

$$\Sigma\left(\mathfrak{f} - m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}, [\delta\mathfrak{u}, \mathfrak{r}]\right) = 0,$$

o bien, teniendo presente (f):

$$\left(\delta\mathfrak{u}\,\Sigma\left[\mathfrak{r}, \mathfrak{f} - m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right]\right) = 0,$$

lo cual demuestra, por ser $\delta\mathfrak{u}$ completamente arbitrario, que tiene que ser:

$$\Sigma\left[\mathfrak{r}, m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = \Sigma\,[\mathfrak{r}, \mathfrak{f}]\,, \qquad (11)$$

de donde se sigue, por una integración parcial,

$$\Sigma\left[\mathfrak{r}, m\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\,\Sigma\,[\mathfrak{r}, m\mathfrak{v}] - \Sigma\left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, m\mathfrak{v}\right];$$

pero como, por ser $\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v}$, el último término se anula, según lo establecido en (e), de (11) se deduce como ecuación del movimiento la

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \mathfrak{N} \qquad (12)$$

cuando se introduce el impulso de rotación

$$\mathfrak{J} = \Sigma m\,[\mathfrak{r}, \mathfrak{v}] \tag{13}$$

y el momento del par de rotación

$$\mathfrak{R} = \Sigma\,[\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{f}]\,. \tag{14}$$

Designando por $\mathfrak{w}$ la velocidad angular se tiene (Cap. III, § 5, (1)):

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]; \tag{15}$$

luego, recordando (h):

$$\mathfrak{J} = \Sigma m\,\mathfrak{r}^2 \cdot \mathfrak{w} = \Sigma m\mathfrak{r}\,(\mathfrak{r}, \mathfrak{w}), \tag{16}$$

o bien, como se comprueba inmediatamente sin más que hacer uso de coordenadas cartesianas:

$$\mathfrak{J} = (K)\,\mathfrak{w}, \tag{17}$$

donde con el símbolo (K) se representa el tensor determinado por el elipsoide de inercia (7).

La ecuación (17) demuestra que el impulso de rotación es una función vectorial lineal de la velocidad angular, que se construye fácilmente según lo dicho en el § 1.

Si en un instante determinado se conoce $\mathfrak{J}$, se obtiene:

$$\mathfrak{w} = (K)^{-1}\,\mathfrak{J}\,.$$

Particularmente sencillo es el caso del movimiento del peón libre ($\mathfrak{R} = 0$); pues entonces, de (12) se sigue que el impulso $\mathfrak{J}$ es un vector de magnitud y dirección constantes, de donde se deduce *a fortiori*:

$$\mathfrak{J}^2 = \text{const.} \tag{18}$$

Asimismo, por no actuar ninguna fuerza, naturalmente, la energía cinética es:

$$T = \text{const.} \tag{19}$$

Llevando a partir de un punto fijo, O, los valores de $\mathfrak{w}$ compatibles con (19) en todas las direcciones posibles, vemos, comparando (7) con (6), que los extremos de todos estos segmentos $\mathfrak{w}$ están en un elipsoide, el elipsoide T, semejante al elipsoide de inercia.

La ecuación (18) representa también un elipsoide, el elipsoide $\mathfrak{J}$, como se ve por la ecuación (17); ambos elipsoides son concéntricos y coaxiales, y las longitudes de los ejes del elipsoide T son:

$$\sqrt{\frac{2T}{K_1}}, \quad \sqrt{\frac{2T}{K_2}}, \quad \sqrt{\frac{2T}{K_3}},$$

en cuyas expresiones K_1, K_2, K_3 denotan los momentos de inercia principales del cuerpo, es decir, los momentos de inercia correspondientes a los ejes del elipsoide, como se deduce inmediatamente refiriendo el elipsoide K a sus ejes.

Los ejes del elipsoide $\mathfrak{J}$ son:

$$\frac{|\mathfrak{J}|}{K_1}, \quad \frac{|\mathfrak{J}|}{K_2}, \quad \frac{|\mathfrak{J}|}{K_3}.$$

El extremo de $\mathfrak{w}$ está, por consiguiente, en la curva de intersección de los dos elipsoides, curva que puede tener diversas formas, de los tipos representados en las figuras 36, 37 y 38 (1). En los tres casos se han tomado iguales elipsoides T, y el $\mathfrak{J}$ ha ido variando aumentando su tamaño, pero conservándose semejante a sí mismo.

(1) Véase H. v. Helmholtz, *Vorlesungen über die Dynamik diskreter Massenpunkte*. Leipzig, 1898, pág. 326.

Como el extremo de $\mathfrak{w}$ debe estar en ambos elipsoides, éstos no pueden excluirse, sino que en los casos

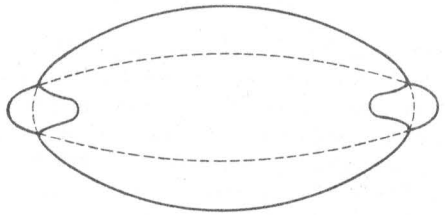

FIG. 37

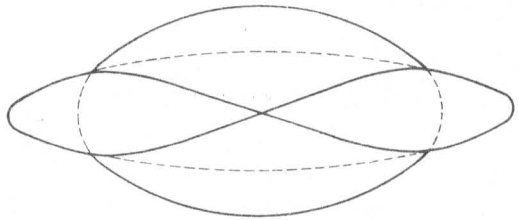

FIG. 38

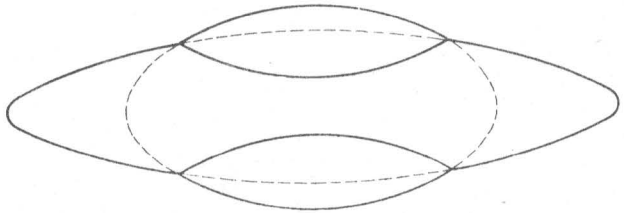

FIG. 39

límites tendrán iguales sus ejes mayores o menores, y entonces la curva se reduce a dos puntos.

En el caso general, el extremo de $\mathfrak{w}$ describe una de las curvas representadas en las figuras 37 a 39, que

son las llamadas *polodias* (de πόλος, polo, y ὁδός, camino), las cuales, lo mismo que los dos elipsoides, están fijas al peón.

Además, como según (17) es $\mathfrak{J} = (K)\mathfrak{w}$, teniendo presentes (2) y (6) será :

$$(\mathfrak{J}, \mathfrak{w}) = 2T; \tag{20}$$

luego, según (19), constante. Como, por otra parte, al no actuar ninguna fuerza sobre el peón, $\mathfrak{J}$ es constante en magnitud y dirección en el espacio, de (20) se deduce que

$$|\mathfrak{w}| \cos (\mathfrak{w}, \mathfrak{J})$$

tiene constantemente el mismo valor, es decir, que el extremo de $\mathfrak{w}$ se mueve en un plano fijo en el espacio, perpendicular a $\mathfrak{J}$; por tanto, describe una curva situada en este plano, que es la llamada herpolodia (de ἕρπειν, arrastrar). El movimiento se verifica, pues, de tal manera que la curva polodia fija en el peón rueda sobre la herpolodia, fija en el espacio (la polodia es « arrastrada » a lo largo de la herpolodia).

El giro alrededor de uno de los tres ejes de inercia principales es un movimiento posible. Si este movimiento sufre una ligera perturbación, por ejemplo, por un pequeño choque, en el caso de ser eje de rotación el de $\left\{\begin{matrix}\text{menor}\\\text{mayor}\end{matrix}\right\}$ momento de inercia, la polodia, que se componía de dos puntos, se transforma en unas pequeñas curvas cerradas que rodean al eje respectivo (figs. 37 y 39); en consecuencia, las rotaciones en torno de estos ejes son estables. En cambio, la polodia de la figura 38, cuyo punto doble indica una rotación alrededor del eje de momento de inercia intermedio, cuando el movimiento sufre una pequeña perturbación se descompone en dos curvas separadas, de las formas de las figuras 37 ó 39, con lo

cual el eje de la rotación perturbada se separa considerablemente del primitivo y, por tanto, la rotación en torno de éste es inestable.

3. Corrimientos infinitesimales

Sea $\mathfrak{q}$ el vector traslación, que suponemos continuo, del elemento de volumen de una materia continua ; vamos a estudiar cuál será la posición del punto material P' del medio, muy próximo a un punto fijo, P, después del corrimiento.

La posición del punto P' respecto del punto P, antes del corrimiento, suponemos que está definida por el vector $PP' = d\bar{s}$. Sean dx, dy, dz las diferencias de coordenadas de P' y P ; entonces, es una propiedad de las coordenadas cartesianas, cualesquiera que sean éstas, que las componentes del elemento de arco son iguales a las diferencias de las coordenadas, es decir, que $d\bar{s}_x = dx$, etc.

Según el teorema de TAYLOR, si $\mathfrak{q}_0$ representa el vector traslación de P, el valor de $\mathfrak{q}$ en P' es

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0 + (d\bar{s}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{q}. \tag{1}$$

y sabemos (Cap. III, § 5) que la traslación de un cuerpo *sólido* puede representarse (véase (2) y (5) de dicho capítulo y parágrafo) por

$$\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_0 + \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{rot}\ \mathfrak{q},\ d\bar{s}]. \tag{2}$$

Si ahora ponemos $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$, el vector $\mathfrak{q}_2$ deberá representar la traslación correspondiente a las deformaciones del medio. Pero de (1) y (2) de deduce :

$$\mathfrak{q}_2 = (d\bar{s}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\,[d\bar{s},\ \mathrm{rot}\ \mathfrak{q}], \tag{3}$$

o bien, introduciendo la representación por medio de las componentes :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{q}_{2x} &= \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x}\,dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x}\right)dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x}\right)dz \\
\mathfrak{q}_{2y} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y}\,dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y}\right)dz \qquad (3') \\
\mathfrak{q}_{2z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial z}\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z}\,dz.
\end{aligned}$$

Esta expresión, por la misma razón de lo que representa, es independiente del sistema de coordenadas. Designando el tensor

$$\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y}\right),\ \ldots \text{ por def } \mathfrak{q}, \text{ que se lee: deformación } \mathfrak{q},$$

la ecuación (3) podrá ser escrita en la forma

$$\mathfrak{q}_2 = (\mathrm{def}\ \mathfrak{q})\ d\bar{s}. \tag{4}$$

El elemento de arco PP' tendrá después del corrimiento las componentes (3') :

$$dx + \mathfrak{q}_{2x}, \qquad dy + \mathfrak{q}_{2y}, \qquad dz + \mathfrak{q}_{2z},$$

y su longitud se convertirá en $|d\bar{s}| + \delta|d\bar{s}|$ y, despreciando las potencias de $\mathfrak{q}$ de grado superior al primero, será :

$$\begin{aligned}
(|d\bar{s}| + \delta|d\bar{s}|)^2 &= d\bar{s}^2 + 2|d\bar{s}| \cdot \delta|d\bar{s}| \\
&= d\bar{s}^2 + 2\,(\mathfrak{q}_{2x}\,dx + \mathfrak{q}_{2y}\,dy + \mathfrak{q}_{2z}\,dz).
\end{aligned} \tag{5}$$

Pero, según (3) o (4) se tiene :

$$\begin{aligned}
(d\bar{s}\ \ \mathfrak{q}_2) &= (d\bar{s},\ \delta\ d\bar{s}) = (d\bar{s}\ \ (d\bar{s}\ \mathrm{grad})\ \mathfrak{q}) = d\bar{s}, (\mathrm{def}\ \mathfrak{q})\ d\bar{s}) \\
&= (\mathrm{def}\ \mathfrak{q}\ \ \mathrm{tens}\ d\bar{s}^2),
\end{aligned} \tag{6}$$

o bien, la dilatación o alargamiento relativo, cuando se denota con $\bar{s}_1$ el vector unidad de $d\bar{s}$, está dada por

$$\frac{\delta|d\bar{s}|}{|d\bar{s}|} = (\text{def } q, \text{ tens } \bar{s}_1^2). \tag{7}$$

Si se representa el tensor def q por su elipsoide correspondiente, llamado elipsoide de deformación, de sus radios vectores en el punto de que se trate del medio se puede deducir la dilatación de cualquier elemento de arco, construyendo primero (def q)$\bar{s}_1$, siguiendo el método explicado en el § 1, y formando después el producto escalar de este vector y $\bar{s}_1$.

Refiriendo el elipsoide de deformación a sus ejes, se obtiene:

$$\frac{\partial q_{x'}}{\partial x'} x'^2 + \frac{\partial q_{y'}}{\partial y'} y'^2 + \frac{\partial q_{z'}}{\partial z'} z'^2 = 1, \tag{8}$$

y de esta ecuación y la (7) se deduce que la deformación es una simple dilatación (o contracción) en dirección de los ejes (ejes de dilatación principales), de modo que el aumento de volumen de la unidad de éste es:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\partial q_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial q_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial q_{z'}}{\partial z'} = \text{div } q \tag{9}$$

como ya habíamos encontrado en el Capítulo III, § 5.

4. Tensiones o esfuerzos superficiales [1]

Se designan con el nombre de tensiones o esfuerzos superficiales las fuerzas que actúan entre dos elementos de volumen que tienen común el elemento de superficie $d\sigma$. Estas fuerzas son proporcionales a la magnitud $d\sigma$ y obedecen al principio de reacción, es decir, la fuerza que actúa sobre un elemento de volumen es igual y de sentido opuesto a la que actúa sobre el otro.

[1] Para más pormenores sobre este paragrafo, véase por ejemplo, E. Cohn, *Das elektromagnetische Feld*. Leipzig, 1900, páginas 87 y siguientes.

Denotando por n la normal positiva a $d\sigma$, designaremos por $\Pi_n d\sigma$ la fuerza que obra del elemento de volumen situado en el lado $+ n$ sobre el que está del lado de las n decrecientes.

El índice n denota, pues, la posición de $d\sigma$. Esta magnitud, como fuerza, es, naturalmente, un vector; designaremos sus componentes por

$$\Pi_{nx} d\sigma, \quad \Pi_{ny} d\sigma, \quad \Pi_{nz} d\sigma.$$

Imponemos a estas fuerzas elásticas la condición de que las que actúan sobre el elemento de volumen equivalgan a las fuerzas de volúmen cuando el elemento de volumen se considere rígido, es decir, que sean iguales las fuerzas de traslación y también los momentos de los pares de rotación.

Apliquemos esta condición primero a un tetraedro rectángulo infinitamente pequeño, cuyas caras catetos, $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\sigma_z$, sean paralelas a los planos coordenados y cuya hipotenusa $d\sigma$ tenga la normal exterior n como positiva. (Fig. 22).

En este caso, las componentes sobre el eje x de las fuerzas correspondientes a los distintos elementos de superficie son:

$$\Pi_{nx} d\sigma, \quad -\Pi_{xx} d\sigma_x, \quad -\Pi_{yx} d\sigma_y, \quad -\Pi\sigma_{zx} d_z,$$

y, por tanto, como

$$d\sigma_x = d\sigma \cdot \cos(n, x), \ldots$$

será:

$$\int_x dS = \{\Pi_{nx} - \Pi_{xx} \cos(n, x) - \Pi_{yx} \cos(n, y) - \Pi_{zx} \cos(n, z)\} d\sigma. \tag{1}$$

El primer miembro de esta ecuación es infinitamente pequeño de tercer orden, en tanto que $d\sigma$ lo es sólo de segundo, luego tiene que ser :

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{nx} &= \Pi_{xx}\cos(n,x) + \Pi_{yx}\cos(n,y) + \Pi_{zx}\cos(n,z) \\ &\text{y análogamente,} \\ \Pi_{ny} &= \Pi_{xy}\cos(n,x) + \Pi_{yy}\cos(n,y) + \Pi_{zy}\cos(n,z) \\ \Pi_{nz} &= \Pi_{xz}\cos(n,x) + \Pi_{yz}\cos(n,y) + \Pi_{zz}\cos(n,z) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Parece, según esto, que las componentes de la tensión sobre una superficie cualquiera están determinadas por nueve parámetros, las componentes de las fuerzas elásticas sobre superficies que son paralelas a los planos coordenados, pero más adelante veremos que existen algunas relaciones entre ellas.

Para deducir las fuerzas de volumen de las fuerzas de superficie o tensiones, tomemos como elemento de volumen un paralelepípedo infinitamente pequeño cuyas aristas dx, dy, dz sean paralelas a los ejes coordenados ; entonces la componente sobre el eje de las x de la fuerza que actúa sobre este elemento de volumen es (fig. 19):

$$\begin{aligned} &-(\Pi_{xx})_x\,dydz + (\Pi_{xx})_{x+dx}\,dydz \\ &-(\Pi_{yx})_y\,dzdx + (\Pi_{yx})_{y+dy}\,dzdx \\ &-(\Pi_{zx})_z\,dxdy + (\Pi_{zx})_{z+dz}\,dxdy \\ &= \left(\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z}\right) dS. \end{aligned} \quad (3)$$

Por consiguiente, la equivalencia impuesta a las fuerzas de superficie y volumen exige que se verifiquen estas relaciones :

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_x &= \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z} \\ \mathfrak{f}_y &= \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zy}}{\partial z} \\ \mathfrak{f}_z &= \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Escribiremos abreviadamente estas fórmulas (4) en la forma :

$$\mathfrak{f} = \operatorname{div} \Pi. \quad (4')$$

Como veremos en seguida, Π representa un tensor ; luego *la divergencia de un tensor es un vector*.

Integrando por partes en la ecuación (4') y teniendo en cuenta (2) se deduce :

$$\int \operatorname{div} \Pi\, dS = \int \Pi_n\, d\sigma. \quad (5)$$

Para encontrar las relaciones antes indicadas entre algunas de las Π_{ik} determinemos el momento $\mathfrak{N}_x$ del par en la rotación del paralelepípedo alrededor del eje x,

$$\mathfrak{N}_x = \Sigma\,(y\Pi_{nz} - z\Pi_{ny})\,d\sigma = (y\mathfrak{f}_z - z\mathfrak{f}_y)\,dS. \quad (6)$$

El valor de este momento es :

$$\begin{aligned} &\{-(y\Pi_{xz} - z\Pi_{xy})_x + (y\Pi_{xz} - z\Pi_{xy})_{x+dx}\}\,dy\,dz \\ &+ \{-(y\Pi_{yz} - z\Pi_{yy})_y + (y\Pi_{yz} - z\Pi_{yy})_{y+dy}\}\,dz\,dx \\ &+ \{-(y\Pi_{zz} - z\Pi_{zy})_z + (y\Pi_{zz} - z\Pi_{zy})_{z+dz}\}\,dx\,dy \\ &= \left\{ y\left(\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zy}}{\partial z}\right) \right. \\ &\qquad \left. + \Pi_{yz} - \Pi_{xy} \right\} dx\,dy\,dz. \end{aligned} \quad (7)$$

De aquí y de las fórmulas (4) y (6) se sigue:

$$\text{y, del mismo modo} \quad \begin{aligned} \Pi_{yz} &= \Pi_{zy}, \\ \Pi_{zx} &= \Pi_{xz}, \\ \Pi_{xy} &= \Pi_{yx}. \end{aligned} \tag{8}$$

La consideración de las fórmulas (2) y (8) demuestra que el vector presión sobre una superficie cualquiera de normal n puede representarse como función vectorial lineal del vector unidad en dirección de la normal n.

Las ecuaciones (2) pueden escribirse, utilizando las relaciones (8), bajo la forma vectorial

$$\Pi_n = (\Pi)\, \mathfrak{n}_1, \tag{9}$$

donde con $\mathfrak{n}_1$ se representa el vector unidad que tiene la dirección de la normal positiva de $d\sigma$.

El elipsoide

$$\Pi_{xx} x^2 + \Pi_{yy} y^2 + \Pi_{zz} z^2 + 2\Pi_{yz} yz \ldots = \pm 1 \tag{10}$$

se llama elipsoide de presiones; la posición y la magnitud de sus ejes determinan las llamadas presiones principales.

Las Π_{kk} se llaman fuerzas elásticas o tensiones normales y las Π_{ik} $(i \neq k)$ tangenciales.

Sobre las superficies normales a los ejes del elipsoide de presiones, solamente actúan tensiones normales.

Trabajo mecánico. Si las fuerzas están expresadas por medio de tensiones, el trabajo de las fuerzas que actúan sobre el volumen S en una traslación infinitamente pequeña, $\mathfrak{q}$, es:

$$\delta' A = \int (\mathfrak{f}, \mathfrak{q})\, dS = \int \left\{ \left(\frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial z} \right) \mathfrak{q}_x + \left(\frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zy}}{\partial z} \right) \mathfrak{q}_y + \left(\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z} \right) \mathfrak{q}_z \right\} dS, \tag{11}$$

de donde, integrando por partes, se deduce:

$$\delta' A = -\int \left\{ \Pi_{xx} \frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x} + \Pi_{yy} \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y} + \Pi_{zz} \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z} + 2\Pi_{yz} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y} \right) + \ldots \right\} dS + \int (\Pi_n, \mathfrak{q})\, d\sigma. \tag{12}$$

La integral de superficie representa el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la superficie que limita el volumen considerado. Si estas fuerzas son nulas, sólo queda la integral de volumen. La fórmula (12) se puede escribir en esta otra forma, más sencilla:

$$\delta' A = -\int (\Pi, \operatorname{def} \mathfrak{q})\, dS + \int_\sigma (\Pi_n, \mathfrak{q})\, d\sigma, \tag{13}$$

representando por $(\Pi, \operatorname{def} \mathfrak{q})$ el producto de los dos tensores Π y def $\mathfrak{q}$, cuya formación explicamos en el § 2 y que nuevamente puede advertirse en (12).

La significación de las integrales que figuran en (13) indica ya su invariancia en toda transformación de coordenadas.

5. Expresión de la deformación y de las presiones en coordenadas ortogonales

La fórmula (7) del § 3 expresa la dilatación de un elemento lineal; como ésta es independiente del sistema de coordenadas, la podremos expresar también en coordenadas ortogonales generales u, v, w.

Según lo dicho en el Capítulo III, § 1, (3), se tiene:

$$d\bar{s}^2 = e_1^2 du^2 + e_2^2 dv^2 + e_3^2 dw^2; \tag{1}$$

luego, por variación de (1)

$$|d\bar{s}| \cdot \delta |d\bar{s}| = e_1 \delta e_1 du^2 + e_2 \delta e_2 dv^2 + e_3 \delta e_3 dw^2 + e_1^2 du\, d\delta u + e_2^2 dv\, d\delta v + e_3^2 dw\, d\delta w, \tag{2}$$

en la que son :

$$\delta e_1 = \frac{\partial e_1}{\partial u}\delta u + \frac{\partial e_1}{\partial v}\delta v + \frac{\partial e_1}{\partial w}\delta w,$$
$$d\delta u = \frac{\partial \delta u}{\partial u}du + \frac{\partial \delta u}{\partial v}dv + \frac{\partial \delta w}{\partial w}dw. \tag{3}$$

En estas fórmulas, δu representa la variación de la coordenada u del elemento de masa en el corrimiento $\mathfrak{q}$, de modo que $\mathfrak{q}$ tiene las componentes :

$$\mathfrak{q}_u = e_1\delta u\,; \quad \mathfrak{q}_v = e_2\delta v\,; \quad \mathfrak{q}_w = e_3\delta w. \tag{4}$$

Sustituyendo los valores (3) y (4) en (2) y dividiendo por $d\bar{s}^2$ se obtiene :

$$\frac{\delta\,|d\bar{s}|}{|d\bar{s}|} = \mathrm{def}_{uu}\,\mathfrak{q}\cos^2(d\bar{s}, u) + \ldots + 2\,\mathrm{def}_{uw}\,\mathfrak{q}\cos(d\bar{s}, v)\cos(d\bar{s}, w) + \ldots, \tag{5}$$

expresión completamente análoga a la de la fórmula (7) del § 3. Los coeficientes expresan def $\mathfrak{q}$ en coordenadas generales.

Efectuando los cálculos indicados resulta :

$$\begin{aligned}
\mathrm{def}_{uu}\,\mathfrak{q} &= \frac{1}{e_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_u}{\partial u} + \frac{\partial e_1}{e_2\,\partial v}\mathfrak{q}_v + \frac{\partial e_1}{e_3\,\partial w}\mathfrak{q}_w\right),\\
\mathrm{def}_{vv}\,\mathfrak{q} &= \frac{1}{e_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_v}{\partial v} + \frac{\partial e_2}{e_3\,\partial w}\mathfrak{q}_w + \frac{\partial e_2}{e_1\,\partial u}\mathfrak{q}_u\right),\\
\mathrm{def}_{ww}\,\mathfrak{q} &= \frac{1}{e_3}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_w}{\partial w} + \frac{\partial e_3}{e_1\,\partial u}\mathfrak{q}_u + \frac{\partial e_3}{e_2\,\partial v}\mathfrak{q}_v\right),\\
\mathrm{def}_{vw}\,\mathfrak{q} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \mathfrak{q}_v}{e_3\,\partial w} + \frac{\partial \mathfrak{q}_w}{e_2\,\partial v} - \frac{1}{e_2 e_3}\left(\frac{\partial e_2}{\partial w}\mathfrak{q}_v + \frac{\partial e_3}{\partial v}\mathfrak{q}_w\right)\right\},\\
\mathrm{def}_{wu}\,\mathfrak{q} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \mathfrak{q}_w}{e_1\,\partial u} + \frac{\partial \mathfrak{q}_u}{e_3\,\partial w} - \frac{1}{e_3 e_1}\left(\frac{\partial e_3}{\partial u}\mathfrak{q}_w + \frac{\partial e_1}{\partial w}\mathfrak{q}_u\right)\right\},\\
\mathrm{def}_{uv}\,\mathfrak{q} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial \mathfrak{q}_u}{e_2\,\partial v} + \frac{\partial \mathfrak{q}_v}{e_1\,\partial u} - \frac{1}{e_1 e_2}\left(\frac{\partial e_1}{\partial v}\mathfrak{q}_u + \frac{\partial e_2}{\partial u}\mathfrak{q}_v\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Teniendo en cuenta la invariancia de (13), § 4, respecto de toda transformación de coordenadas, y suponiendo que las tensiones Π sobre la superficie que limita S son ya nulas, la expresión del trabajo mecánico puede ser escrita así :

$$\delta' A = -\int(\Pi_{uu}\,\mathrm{def}_{uu}\,\mathfrak{q} + \Pi_{vv}\,\mathrm{def}_{vv}\,\mathfrak{q} + \Pi_{ww}\,\mathrm{def}_{ww}\,\mathfrak{q} + 2\Pi_{vw}\,\mathrm{def}_{vw}\,\mathfrak{q} + \ldots)\,dS. \tag{7}$$

Sustituyendo def $\mathfrak{q}$ por su valor (6) en (7) e integrando por partes los términos en que figuran las derivadas de $\mathfrak{q}$ respecto de las coordenadas, resulta :

$$\begin{aligned}
\delta' A = &\int\left\{\left(\frac{\partial(\Pi_{uu}e_2e_3)}{\partial u} + \frac{\partial(\Pi_{uv}e_3e_1)}{\partial v} + \frac{\partial(\Pi_{uw}e_1e_2)}{\partial w}\right)\mathfrak{q}_u + \ldots\right\}du\,dv\,dw\\
&-\int\left\{\left(\Pi_{uu}\frac{\partial \lg e_1}{\partial u} + \Pi_{vv}\frac{\partial \lg e_2}{\partial u} + \Pi_{ww}\frac{\partial \lg e_3}{\partial u}\right)\frac{\mathfrak{q}_u}{e_1} + \ldots\right\}e_1e_2e_3\,du\,dv\,dw\\
&+\int\left\{\left(\Pi_{uu}\frac{\partial e_1}{e_1\,\partial u} + \Pi_{uv}\frac{\partial e_1}{e_2\,\partial v} + \Pi_{uw}\frac{\partial e_1}{e_3\,\partial w}\right)\frac{\mathfrak{q}_u}{e_1} + \ldots\right\}e_1e_2e_3\,du\,dv\,dw\\
&= \int(\mathfrak{f}, \mathfrak{q})\,dS,
\end{aligned} \tag{8}$$

luego la expresión de la fuerza por unidad de volumen será :

$$\mathsf{f}_u = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left(\frac{\partial (\Pi_{uu} e_2 e_3)}{\partial u} + \frac{\partial (\Pi_{uv} e_3 e_1)}{\partial v} + \frac{\partial (\Pi_{uw} e_1 e_2)}{\partial w}\right)$$
$$- \frac{1}{e_1}\left(\Pi_{uu}\frac{\partial \lg e_1}{\partial u} + \Pi_{vv}\frac{\partial \lg e_2}{\partial u} + \Pi_{ww}\frac{\partial \lg e_3}{\partial u}\right) \quad (9)$$
$$+ \frac{1}{e_1}\left(\Pi_{uu}\frac{\partial e_1}{e_1 \partial u} + \Pi_{uv}\frac{\partial e_1}{e_2 \partial v} + \Pi_{uw}\frac{\partial e_1}{e_3 \partial w}\right).$$

El segundo miembro de (9) es la componente relativa a u de div Π.

Las fórmulas dadas en este parágrafo son de particular interés en el estudio de los problemas elásticos.

CAPÍTULO V

Aplicaciones a la Hidrodinámica y a la Electrodinámica

1. Ecuaciones de Euler en la Hidrodinámica

Para obtener las ecuaciones diferenciales de la Hidrodinámica comencemos por deducir la llamada *ecuación de continuidad,* es decir, la condición para que el flúido que en la unidad de tiempo ha incrementado el volumen S haya penetrado a través de la superficie σ que limita el volumen S.

Designando por ϱ la densidad, $\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dS$ es el incremento de masa en la unidad de tiempo; por otra parte, en dicha unidad de tiempo el elemento $d\sigma$ es atravesado por el volumen $-v_n d\sigma$, representando por v la velocidad y por n la normal exterior, luego toda la superficie será atravesada por la masa $-\int \varrho v_n d\sigma$, y tendremos:

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dS = -\int \varrho v_n d\sigma. \quad (1)$$

De esta igualdad, aplicando el teorema de GAUSS, se deduce:

$$\int \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho v\right) dS = 0; \quad (2)$$

pero, por ser arbitrario el volumen, el integrando debe ser nulo, luego :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} = 0, \tag{3}$$

ecuación que, recordando (s) se podrá escribir así :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad} \varrho) + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0, \tag{4}$$

o también, teniendo en cuenta lo dicho en el Capítulo II, § 7, (2) :

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0. \tag{5}$$

Las ecuaciones (3) y (5) son formas distintas de la *ecuación de continuidad.*

Si el flúido es incompresible, es $\frac{d\varrho}{dt} = 0$; luego la condición de incompresibilidad es :

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0, \tag{6}$$

lo que ya hubiéramos podido deducir de lo dicho en el último parágrafo del Capítulo III, pues allí obtuvimos div $\mathfrak{v}$ como expresión de la dilatación de la unidad de volumen.

Si ϱ es la densidad del flúido en un punto en el que actúa la fuerza $\mathfrak{f}$ sobre la unidad de volumen, el principio de d'ALEMBERT, supuesto que no obra ninguna fuerza sobre la superficie del flúido, da :

$$\int \left(\left(\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} - \mathfrak{f} \right), \delta \mathfrak{s} \right) dS = 0, \tag{7}$$

siendo $d\mathfrak{s}$ un corrimiento virtual.

Por ser incompresible el flúido se verifica :

$$\operatorname{div} \delta \mathfrak{s} = 0. \tag{8}$$

Multiplicando (8) por el factor de LAGRANGE, p, e integrando sobre S resulta, recordando (s) :

$$\int p \operatorname{div} \delta \mathfrak{s} \, dS = -\int (\operatorname{grad} p, \delta \mathfrak{s}) \, dS + \int p \, \delta \mathfrak{s}_n \, d\sigma = 0. \tag{9}$$

Restando (9) de (7) y observando que entonces los corrimientos virtuales son completamente arbitrarios, se obtiene como ecuación del movimiento :

$$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \operatorname{grad} p, \tag{10}$$

y resulta, además, que en la superficie tiene que ser $\delta \mathfrak{s}_n = 0$, es decir, que en ella deben existir paredes fijas, o que $p = 0$. Según lo dicho en el Capítulo IV, § 4, el factor de LAGRANGE representa una presión normal, igual en todas las direcciones, ejercida sobre el elemento de superficie en el interior del flúido

De lo dicho en el Capítulo II, § 7, (2) se sigue :

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{dt} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad}) \mathfrak{v} = \frac{1}{\varrho} (\mathfrak{f} - \operatorname{grad} p). \tag{11}$$

Estas son la ecuaciones de EULER, de la Hidrodinámica.

2. Teoremas de Helmholtz en la Hidrodinámica

Si en la ecuación (r) ponemos

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{v}$$

se obtiene :

$$(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}], \tag{1}$$

y de § 1, (11)

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{v}] = \frac{1}{\varrho}\,(\mathfrak{f} - \mathrm{grad}\,p). \tag{2}$$

Observemos que para flúidos incompresibles, únicos de que tratamos, es $\varrho = \text{const}$, y formemos el rot de (2) ; recordando (m) y sustituyendo el valor de la velocidad angular, $\mathfrak{w}$, del flúido, dado por (5), Capítulo III, § 5,

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} \tag{3}$$

tendremos :

$$2\,\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} - 2\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}] = \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}, \tag{4}$$

mientras que de (3) se deduce :

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0. \tag{5}$$

Tomando ahora de la ecuación (4) el valor de la componente normal de cualquiera superficie, σ, fija en el espacio, integrando sobre ella y aplicando el teorema de Stokes al segundo miembro, se encuentra :

$$\int_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathfrak{w}_n}{\partial t} - \mathrm{rot}_n\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}] \right\} d\sigma = \frac{1}{2\varrho} \int_\Omega (\mathfrak{f}, d\mathfrak{s}); \tag{6}$$

pero, según el Capítulo II, § 7, (3), y teniendo en cuenta (5), el primer miembro es $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\sigma \mathfrak{w}_n\,d\sigma$; por consiguiente, será :

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathfrak{w}_n\,d\sigma = \frac{1}{2\varrho}\int_\Omega (\mathfrak{f}, d\mathfrak{s}). \tag{7}$$

Si la fuerza $\mathfrak{f}$ tiene un potencial único, esto es, si se trata de una fuerza *conservativa* exterior, el segundo miembro se anula (Cap. II, § 1) y se tiene :

$$\int_\sigma \mathfrak{w}_n\,d\sigma = \text{const}. \tag{8}$$

Esta integral se llama *flujo* o *intensidad de torbellino*, y la ecuación (8) expresa el importante teorema debido a Helmholtz :

Si un flúido incompresible se mueve bajo la influencia de fuerzas conservadoras, el flujo de torbellino de una superficie que pasa continuamente por las mismas partículas del flúido permanece constante.

De la ecuación (3), teniendo presente la (8) y aplicando el teorema de Stokes, se deduce :

$$\int_\Omega (\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}) = \text{const}. \tag{9}$$

Si ahora trazamos por los puntos de un elemento lineal, dl, las líneas $\mathfrak{w}$, obtenemos una faja de superficie para cuyos puntos es $\mathfrak{w}_n = 0$. Como para estas partículas materiales se conserva $\mathfrak{w}_n = 0$, esto quiere decir : *Las partículas de flúido de una línea* $\mathfrak{w}$ (*línea de torbellino*) *se conservan durante el movimiento en una línea de torbellino.*

Por todos los puntos del borde de una superficie cualquiera tracemos las líneas de torbellino; tendremos así formada una superficie, llamada canal de torbellino, y cada una de sus secciones tiene el mismo momento de torbellino (puesto que div $\mathfrak{w} = 0$). De aquí se sigue: *La masa de flúido que en un momento determinado llena un canal de torbellino forma también en todo el curso del movimiento un canal de torbellino de intensidad invariable respecto del tiempo.*

Si en un cierto instante no hubiera torbellinos en el líquido, es decir, si $\mathfrak{w} = 0$, la constante en (8) sería nula; luego, según (9):

$$\int_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}) = 0, \tag{9'}$$

o bien:

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad} \varphi. \tag{10}$$

La magnitud φ recibe el nombre de *potencial de velocidad*. En este caso, la condición de incompresibilidad, div $\mathfrak{v} = 0$, se transforma en

$$\Delta\varphi = 0, \tag{11}$$

de donde puede deducirse el valor de φ. La presión p se halla entonces del siguiente modo: De (2), suponiendo que la fuerza tenga un potencial

$$\mathfrak{f} = -\operatorname{grad} U \tag{12}$$

se deduce:

$$\frac{\partial \operatorname{grad} \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \cdot \operatorname{grad}^2 \varphi + \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} (U + p) = 0,$$

o bien, integrando:

$$\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varrho}{2} \operatorname{grad}^2 \varphi + U + p = p_0, \tag{13}$$

donde p_0 representa una constante de integración que aun puede depender del tiempo.

En esta fórmula, $\frac{\varrho}{2} \operatorname{grad}^2 \varphi = \frac{\varrho}{2} \mathfrak{v}^2$ es la energía cinética y U la energía potencial de la unidad de volumen. Se ve así que en estados estacionarios la presión p es numéricamente igual a la energía de la unidad de volumen cuando se atribuye el valor 0 a la presión p_0 del flúido en reposo y sobre el cual no actúa fuerza alguna.

3. Corrimientos electrolíticos

Para los gases se verifica la ecuación de estado:

$$pv = RT, \tag{1}$$

donde p representa la presión, v el volumen de una molécula gramo, T la temperatura absoluta y R una constante universal.

Según los trabajos de VAN T'HOFF, esta misma ecuación es aplicable a soluciones diluídas; entonces, p representa la presión osmótica constante en todas las direcciones, v el volumen de disolvente en el que está disuelto un equivalente gramo. Se tiene, pues:

$$v = \frac{1}{N}, \tag{2}$$

si se designa por N el número equivalente gramo en el volumen unidad.

La presión (osmótica) en el volumen unidad es, según el Capítulo IV, § 4, (4), $-\operatorname{grad} p$ [1] si la presión es p; de (1) y (2) se deduce:

$$-\operatorname{grad} p = -RT \operatorname{grad} N. \tag{3}$$

[1] Hay que tomar el signo negativo porque la presión en (1) representa la fuerza ejercida por la partícula considerada sobre su entorno, mientras que en el Capítulo IV habíamos tomado como positiva la que actúa sobre la partícula.

Supongamos que T sea constante. En el volumen unidad hay N equivalentes gramo, luego la fuerza sobre un equivalente gramo será :

$$\frac{-RT}{N} \text{ grad } N, \text{ o bien, } -RT \text{ grad } lg\, N. \qquad (4)$$

A esta fuerza hay que agregar la eléctrica ejercida sobre la partícula cargada eléctricamente. Si el equivalente gramo tiene la carga e y el potencial del campo eléctrico es Φ, la pendiente o gradiente de potencial es — grad Φ, y la fuerza que obra sobre un equivalente gramo es :

$$-e \text{ grad } \Phi,$$

de modo que la fuerza total que actúa sobre un equivalente gramo tiene el valor

$$\mathfrak{f} = -\frac{RT}{N} \text{ grad } N - e \text{ grad } \Phi. \qquad (5)$$

Ahora bien, en los casos de gran rozamiento se sabe por Mecánica que en el estado final estacionario existe un movimiento con velocidad uniforme $\mathfrak{v}$; es decir, la velocidad es proporcional a la fuerza que se ejerce; el factor de proporcionalidad, u, recibe la denominación de *movilidad*. Se tiene, pues,

$$\mathfrak{v} = u\mathfrak{f} = -u\left(\frac{RT}{N} \text{ grad } N + e \text{ grad } \Phi\right). \qquad (6)$$

En cuanto a la ecuación de continuidad será ahora (§ 1) :

$$\frac{\partial N}{\partial T} + \text{div } (\mathfrak{v}N) = 0. \qquad (7)$$

Limitándonos a considerar electrolitos uniformes binarios, en los cuales una molécula eléctricamente neutra

se descompone en *un* ion positivo y *uno* negativo, demos a los iones positivos el índice 1 y a los negativos el 2. Por ser $e_1 = -e_2 = e$, la condición para que cada elemento de volumen sea neutro eléctricamente, que con gran aproximación se verifica siempre, es :

$$N_1 = N_2 = N. \qquad (8)$$

De (6), (7) y (8) se deduce :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N}{\partial T} - u_1 RT \text{ div grad } N - u_1 e \text{ div } (N \text{ grad } \Phi) = 0 \\ &\frac{\partial N}{\partial T} - u_2 RT \text{ div grad } N + u_2 e \text{ div } (N \text{ grad } \Phi) = 0, \end{aligned} \qquad (9)$$

y multiplicando la primera de estas igualdades por u_1, la segunda por u_2 y sumando los resultados, se obtiene, recordando (n) :

$$\frac{\partial N}{\partial T} = 2RT \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} \triangle N. \qquad (10)$$

Esta ecuación diferencial determina la variación de la concentración N con el tiempo, esto es, la difusión.

Nernst ha mostrado que el coeficiente de difusión expresado en función de las movilidades de los iones en unidades electrostáticas, u, la constante de los gases, R, y la temperatura absoluta, T, por la fórmula :

$$D = 2RT \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2}, \qquad (11)$$

coincide con el obtenido por determinación experimental directa.

Restando las dos igualdades (9) se obtiene :

$$\text{div}\{(u_1 - u_2)\, RT \text{ grad } N + (u_1 + u_2)\, eN \text{ grad } \Phi\} = 0, \qquad (12)$$

e integrando :

$$(u_1 - u_2)\, RT \operatorname{grad} N + (u_1 + u_2)\, eN \operatorname{grad} \Phi = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \quad (13)$$

donde $\mathfrak{A}$ denota un vector (de integración) arbitrario.

Admitamos ahora que la caída de potencial *sólo* pueda provenir de la concentración N, variable con el lugar. Siendo, pues, constante N, también tiene que serlo Φ; luego rot $\mathfrak{A} = 0$ y

$$(u_1 - u_2)\, RT \operatorname{grad} N + (u_1 + u_2)\, eN \operatorname{grad} \Phi = 0; \quad (13\,)$$

de donde, dividiendo por $(u_1 + u_2)Ne$ sale:

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \frac{RT}{e} \operatorname{grad} lgN. \quad (14)$$

Integrando desde un punto del flúido en que la concentración y el potencial tengan los valores N, Φ hasta un punto en que estas magnitudes sean N', Φ' se obtiene:

$$\Phi' - \Phi = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1} \frac{RT}{e} lg \frac{N'}{N}, \quad (15)$$

que es la fórmula de NERNST, que determina la diferencia de potenciales en una disolución, debida a las diferencias de concentración.

El mismo NERNST y otros investigadores han mostrado que también en este punto coinciden los resultados de la teoría con los de la experiencia.

4. Ecuaciones de Maxwell

Vamos a deducir las ecuaciones de MAXWELL en la teoría de la electricidad, generalizando dos leyes sencillas, la de BIOT-SAVART y la de inducción de FARADAY. Evidentemente, estas generalizaciones no tienen el valor de una *demostración*, pero justifican las ecuaciones.

Observemos que el campo magnético $\mathfrak{H}$, esto es, la fuerza que origina una corriente rectilínea i sobre la masa magnética positiva unidad supuesta aislada, rodea circularmente a la corriente i, de tal manera que los planos de estas circunferencias son perpendiculares a i y un corrimiento simultáneo en las direcciones de $\mathfrak{H}$ e i satisface a la regla del sacacorchos. Además, la intensidad del campo, $\mathfrak{H}$, es proporcional a i. Observemos finalmente que si suspendemos normalmente a las direcciones de $\mathfrak{H}$ e i, esto es, radialmente, una barra magnética (fig. 40), de tal modo que pueda girar libremente alrededor del punto O, de intersección de la prolongación de la barra con la trayectoria de la corriente, no existe ningún par.

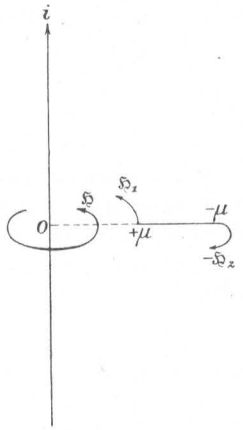

FIG. 40

Si el polo positivo, de intensidad $+\mu$, está a la distancia ϱ_1 de O, y el negativo $(-\mu)$ a la ϱ_2, el momento respecto del eje que coincide con el circuito es:

$$\mathfrak{N} = \mu\,|\mathfrak{H}_1|\,\varrho_1 - \mu\,|\mathfrak{H}_2|\,\varrho_2 = 0, \quad (1)$$

de donde se sigue:

$$|\mathfrak{H}_1| : |\mathfrak{H}_2| = \varrho_2 : \varrho_1; \quad (2)$$

podremos, por consiguiente, poner:

$$|\mathfrak{H}| = \frac{\alpha i}{\varrho}, \quad (3)$$

donde α designa una constante arbitraria, a la que daremos el valor

$$\alpha = \frac{1}{2\pi c}, \tag{4}$$

indicando por c la velocidad de la luz en el vacío. Mediante estas constantes queda fijada la relación entre la unidad de i y la de $\mathfrak{H}$.

Tenemos, pues,

$$|\mathfrak{H}| = \frac{i}{2\pi c\varrho}. \tag{5}$$

Calculemos el trabajo realizado por las fuerzas magnéticas cuando se hace mover un polo magnéticounidad alrededor del circuito; se obtiene entonces:

$$A = \int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}); \tag{6}$$

pero como $\mathfrak{H}$ siempre está dirigido tangencialmente, la proyección de $d\mathfrak{s}$ sobre la dirección de $\mathfrak{H}$ es $\varrho d\varphi$ (φ es el ángulo que forma el plano determinado por el punto del elemento de línea con la corriente y otro plano fijo trazado por ésta). Se tiene, por tanto,

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{i}{2\pi c\varrho}\, \varrho d\varphi = \frac{i}{c}. \tag{7}$$

La intensidad i es, según las antiguas (y las más recientes) ideas sobre la electricidad, la cantidad de electricidad que en la unidad de tiempo pasa por una sección del circuito.

Si designamos la intensidad del campo eléctrico en el alambre (la pendiente del potencial) por $\mathfrak{E}$, la diferencia de potenciales, V, entre dos puntos del circuito que disten entre sí l es:

$$V = \mathfrak{E} \cdot l; \tag{8}$$

pero, según la ley de Ohm,

$$i = \frac{V}{w}, \tag{9}$$

siendo w la resistencia, que puede expresarse en función de la conductibilidad, λ, la sección del alambre, σ, y la longitud de éste, l, por la fórmula:

$$w = \frac{l}{\sigma\lambda}; \tag{10}$$

resulta, pues,

$$i = \mathfrak{E}\lambda\sigma. \tag{11}$$

Cuando $\mathfrak{E}$ y λ no son constantes en la sección del conductor, la fórmula (11) se transforma en esta otra:

$$i = \int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma, \tag{12}$$

y las (6), (7) y (9) dan:

$$c \int_{\mathfrak{C}} (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma. \tag{13}$$

Admitiremos la *validez general de esta fórmula*, que relaciona $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{H}$, *para todo proceso estacionario*, y en particular será válida (13) cuando $d\mathfrak{s}$ represente el elemento de una curva cerrada cualquiera, s, y σ sea una superficie arbitraria cuyo borde sea la línea s.

Si se trata de procesos *no estacionarios*, la fórmula (12) no representa ya la cantidad de electricidad que pasa en la unidad de tiempo por la superficie, sino solamente una parte de ella.

Al hablar de un dieléctrico entenderemos lo siguiente: En cada unidad de volumen hay N partículas (electrones), cada una de los cuales tiene la cantidad e de electricidad, y otras tantas con la cantidad $-e$ de electricidad. Cada partícula tiene una posición de equilibrio (a los electrones de esas condiciones se les llama electrones de polarización). Sacando la partícula de esta posición se produce en ella una fuerza (elástica) proporcional al corrimiento, $\mathfrak{l}$, respecto de la posición de equilibrio, pero dirigida en sentido contrario a éste. Si la intensidad del campo eléctrico, $\mathfrak{E}$ (es decir, la fuerza que actúa sobre la carga eléctrica unidad) es variable, se puede ver que el incremento del corrimiento debido al incremento de la intensidad del campo eléctrico, $d\mathfrak{E}$, es

$$d\mathfrak{l} = \beta e d\mathfrak{E}, \tag{14}$$

designando por β una constante.

Por una superficie $d\sigma$ pasan entonces todos los electrones contenidos en el cilindro oblicuo de base $d\sigma$ y aristas $d\mathfrak{l}$, pero el número de estos electrones es $Nd\mathfrak{l}_n \cdot d\sigma$; luego la cantidad de electricidad debida al aumento del campo desde $\mathfrak{E}$ hasta $\mathfrak{E} + d\mathfrak{E}$ es:

$$eN\, d\mathfrak{l}_n\, d\sigma = \beta e^2 N d\mathfrak{E}_n d\sigma\,; \tag{15}$$

por consiguiente, en la unidad de tiempo atraviesa la superficie $d\sigma$ la cantidad de electricidad

$$\beta e^2 N \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial t} d\sigma. \tag{16}$$

Sumando ahora las partes correspondientes a los electrones positivos y negativos se obtiene:

$$\Sigma \beta\, e^2 N \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{dt}\, d\sigma.$$

Pondremos:

$$\Sigma \beta e^2 N = \varepsilon, \tag{17}$$

y diremos que ε es la constante dieléctrica del medio. A la $\int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma$ hay, pues, que agregar:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma,$$

y si admitimos que los electrones de polarización actúan magnéticamente de la misma manera que los electrones móviles libres del conductor, al segundo miembro de (13) habrá que agregar todavía otro término, con lo cual resultará la fórmula:

$$c \int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma + \int_\sigma \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma. \tag{18}$$

A la cantidad $\lambda \mathfrak{E} = \mathfrak{J}$ se le llama corriente de conducción; a la $\frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ corriente de desplazamiento, y a la $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ inducción eléctrica.

La ecuación (18) es la *primera ecuación de* MAXWELL; la atribuiremos validez general para medios en reposo.

La segunda ecuación de MAXWELL es una generalización de la ley de inducción de FARADAY.

En un conductor cerrado lineal, s, se engendra una corriente cuando varía el número de líneas de fuerza $\mathfrak{H}$ que atraviesan una superficie arbitraria que tiene como borde la línea s, y la fuerza electromotriz, es decir, la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de la línea conductora, es proporcional a la velocidad de variación del número de líneas $\mathfrak{H}$.

Ahora bien, este número es:

$$\int \mathfrak{H}_n d\sigma,$$

luego su velocidad de variación será:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{H}_n d\sigma.$$

El factor de proporcionalidad depende de la materia que hay en σ; lo representaremos por $\frac{\mu}{c}$ y llamaremos a la cantidad μ *permeabilidad* (magnética) del medio. Si la intensidad del campo eléctrico (la pendiente del potencial) es $\mathfrak{E}$, la fuerza electromotriz es $\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s})$, y como a un incremento de líneas $\mathfrak{H}$ corresponde una fuerza electromotriz en la dirección negativa de s, será:

$$-c\int_{\mathfrak{O}} (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \frac{\partial}{\partial t}\int \mu \mathfrak{H}_n d\sigma. \tag{19}$$

Esta ecuación (19) es la *segunda ecuación de* MAXWELL. La atribuimos una validez general en los medios en reposo.

La aplicación del teorema de STOKES al primer miembro de (18) da:

$$c\int_{\sigma} \mathrm{rot}_n \mathfrak{H} d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma} \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma + \int_{\sigma} \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma, \tag{20}$$

y como esta ecuación debe verificarse para cualquier superficie, lo mismo debe ocurrir para los integrandos. Se tendrá, pues:

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} + \lambda \mathfrak{E}; \tag{21}$$

de la misma manera se deduce de (19):

$$-c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = \frac{\partial \mu \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{22}$$

Las ecuaciones (21) y (22) son las de MAXWELL en su *forma diferencial*, en tanto que las (18) y (19) son en forma integral.

Como ni en la ecuación (18) ni en la (19) interviene ningún sistema coordenado, aparece evidente la *independencia* de las ecuaciones de MAXWELL de todo sistema de coordenadas.

Estas ecuaciones se pueden escribir también utilizando las coordenadas curvilíneas generales, aplicando lo dicho en el Capítulo III, § 2, (11). La (21) toma entonces esta forma:

$$\frac{c}{e_2 e_3}\left(\frac{\partial e_3 \mathfrak{H}_w}{\partial v} - \frac{\partial e_2 \mathfrak{H}_v}{\partial w}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \mathfrak{E}_u + \lambda \mathfrak{E}_u. \tag{23}$$

5. Tres integrales de las ecuaciones de Maxwell

Utilizando, para aplicar las ecuaciones (18) y (19) del párrafo anterior, como superficie σ una *cerrada*, no existe borde. Podemos imaginar esto como caso límite de una superficie no cerrada, cuyo borde va recogiéndose a la manera que en una bolsa de tabaco que poco a poco se cierra al tirar del cordón ensartado en la boca de la bolsa. Los primeros miembros de las ecuaciones son, por tanto, nulos y se tiene para el caso de superficies cerradas:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma + \int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mu \mathfrak{H}_n d\sigma = 0. \tag{2}$$

Si en (1) se supone que la superficie σ no es conductora, en todos sus puntos será $\lambda = 0$; luego, en este caso,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma = 0. \tag{1'}$$

La integración da:

$$\int \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma = e, \tag{3}$$

y, del mismo modo, la integración de (2) da:

$$\int \mu \mathfrak{H}_n d\sigma = m, \tag{4}$$

en cuyas expresiones e y m son constantes de integración. Según lo dicho en el Capítulo II, § 2, la (3) indica que el número de líneas $\varepsilon\mathfrak{E}$ que salen de una superficie no conductora es invariable con el tiempo. Análogamente, la ecuación (4) expresa que el número de líneas $\mu\mathfrak{H}$ que salen de una superficie es constante.

Si, siguiendo a FARADAY, identificamos las magnitudes e y m con toda la *cantidad de electricidad*, o de *magnetismo*, respectivamente, que existe en el volumen S limitado por la superficie σ, la ecuación (3) podrá enunciarse así:

La cantidad de electricidad encerrada en una superficie no conductora permanece constante en medios en reposo.

La ecuación (4) expresa que: *la cantidad de magnetismo encerrada por una superficie permanece constante en medios en reposo.*

La (1) nos dice que *el incremento de la cantidad de electricidad que existe en una porción del espacio está dado cuantitativamente por la corriente que atraviesa la superficie que lo limita.*

Aplicando el teorema de GAUSS a las ecuaciones (3) y (4) y designando la densidad, es decir, la cantidad de electricidad o de magnetismo que hay en el volumen unidad, por ϱ_e y ϱ_m, respectivamente, se tiene:

$$\int \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} \cdot dS = \int \varrho_e dS, \tag{3'}$$

$$\int \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} \cdot dS = \int \varrho_m dS, \tag{4'}$$

de donde se sigue, por ser arbitrario el volumen S:

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = \varrho_e, \qquad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \varrho_m; \tag{5}$$ (6)

es decir, de cada unidad de electricidad (o de magnetismo) sale una línea $\varepsilon\mathfrak{E}$ (o $\mu\mathfrak{H}$). La aplicación del teorema de GAUSS a (1) da para el caso en que ε y λ son constantes para todos los puntos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0, \tag{7}$$

o bien, teniendo en cuenta (5):

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \varrho_e = 0, \tag{7'}$$

de donde, por integración, se deduce:

$$\varrho_e = \varrho_{e0} e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon} t}; \tag{8}$$

siendo ϱ_{e0} la densidad eléctrica en el tiempo 0.

La densidad *espacial* tiende, pues, a cero; pero como, según (3), ninguna electricidad puede perderse, se sigue

de aquí que en el estado final se encuentra en la superficie como carga superficial.

Para llegar a otra integral de las ecuaciones de MAXWELL, multipliquemos escalarmente la ecuación (21) del párrafo 4 de este capítulo por $\mathfrak{E}$, y la (22) por $\mathfrak{H}$, sumemos e integremos en un volumen S de superficie σ. Se obtiene así:

$$c\int((\mathfrak{E}, \operatorname{rot}\mathfrak{H}) - (\mathfrak{H}, \operatorname{rot}\mathfrak{E}))\, dS =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\, dS + \int\lambda\mathfrak{E}^2\, dS. \qquad (9)$$

El primer miembro, teniendo en cuenta (p), es igual a

$$-c\int \operatorname{div}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]\, dS$$

y, según el teorema de GAUSS:

$$-c\int[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_n\, d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\, dS + \int\lambda\mathfrak{E}^2 dS. \quad (10)$$

Ahora, la experiencia demuestra que el segundo término del segundo miembro es el calor, J, desarrollado en la unidad de tiempo (efecto JOULE), lo cual se reconoce inmediatamente en un caso sencillo. Tomemos como espacio un trozo de alambre de longitud l y sección σ por donde pasa la corriente i; según las ecuaciones (8), (9) y (10) del parágrafo 4 de este capítulo es:

$$\mathrm{J} = \int\lambda\,\mathfrak{E}^2\, dS = i^2 w \qquad (11)$$

la conocida expresión del efecto JOULE.

Introduzcamos un nuevo vector, el llamado vector de radiación de POYNTING:

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] \qquad (12)$$

y tendremos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\, dS + \mathrm{J} + \int\mathfrak{S}_n\, d\sigma = 0. \qquad (13)$$

Para ver la interpretación física de cada uno de los términos de (13) tomemos como S el espacio infinito y supongamos que $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{H}$ (por consiguiente, también $\mathfrak{S}$) se anulan en el infinito, de modo que desaparece la integral de superficie. Tenemos entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\, dS + \mathrm{J} = 0; \qquad (14)$$

luego,

$$\frac{1}{2}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\, dS = W \qquad (15)$$

tiene que ser la *energía electromagnética*. La ecuación (14) expresa el principio de conservación de la energía. *La pérdida de energía electromagnética es igual al calor de* JOULE *desarrollado*.

Cuando el espacio considerado es uno cualquiera, S, la expresión (15) se denomina energía electromagnética localizada en S, y entonces la (13) expresa:

En una parte cualquiera de espacio, la pérdida de energía electromagnética corresponde al calor de JOULE *desarrollado y a la radiación que atraviesa su superficie exterior.*

Si consideramos un espacio cualquiera en cuya superficie exterior $\mathfrak{S}$ no hay componente normal alguna y en el que no hay ningún conductor, tendremos:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

luego

$$W = \text{const.} \tag{16}$$

Las cantidades

$$W_e = \int \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2 \, dS,$$

$$W_m = \int \frac{\mu}{2} \mathfrak{H}^2 \, dS,$$

se llaman, respectivamente, energía eléctrica y magnética.

Las ecuaciones (3), (4) y (16) son integrales de las ecuaciones de MAXWELL y expresan las leyes de indestructibilidad de las masas eléctricas y magnéticas y la ley de conservación de la energía.

6. Las ecuaciones en derivadas parciales de $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{H}$

Nos proponemos obtener de las ecuaciones de MAXWELL

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \lambda \mathfrak{E}, \tag{1}$$

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

otras ecuaciones que contengan *sólo* $\mathfrak{E}$ o *sólo* $\mathfrak{H}$. Suponemos el medio homogéneo y, por tanto, que ε, μ, λ son independientes del lugar.

Formemos el rot de (1) y sustituyamos rot $\mathfrak{E}$ por su valor deducido de (2); tendremos así:

$$c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{\lambda\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{3}$$

por consiguiente, teniendo presente (o),

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} (\triangle \mathfrak{H} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{H}). \tag{4}$$

De la misma manera, formemos el rot de (2) y sustituyamos rot $\mathfrak{H}$ por su valor deducido de (1); tendremos así:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} (\triangle \mathfrak{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E}). \tag{5}$$

Consideremos ahora un dieléctrico y, por tanto, $\lambda = 0$; si las densidades eléctrica y magnética son en un cierto momento nulas, lo dicho en el parágrafo 5 demuestra que entonces se conservan nulas, y se deduce de (3) y (4) la misma ecuación:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \triangle U, \tag{6}$$

en la que U puede representar una componente cualquiera de $\mathfrak{E}$ o de $\mathfrak{H}$.

La (6) es la conocida ecuación de la onda. Si U, aparte del tiempo, solamente depende de *una* coordenada, por ejemplo de la x, la onda es plana y se tiene:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{6'}$$

Es fácil de comprobar que $U = f_1\left(x - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,t\right)$ satisface a la ecuación (6'), siendo f_1 una función completamente arbitraria. Sustituyendo en esta expresión x por $x + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ y t por $t + 1$, no varía el argumento ni, por tanto, la función; es decir, en la unidad de tiempo se propaga el campo, en el sentido positivo del eje x, en la magnitud $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, la cual es, por consiguiente, la velocidad de propagación del campo magnético en un medio de constante dieléctrica ε y permeabilidad μ. Como en el éter son $\varepsilon = 1$ y $\mu = 1$, la velocidad de propagación en el éter es c.

De igual modo, $U = f_2\left(x + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,t\right)$ es una solución de (6') que representa la propagación del campo de una onda plana en el sentido negativo del eje x. La solución más general es:

$$U = f_1\left(x - \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,t\right) + f_2\left(x + \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,t\right). \qquad (7)$$

Ahora bien, el índice de refracción, n, es inversamente proporcional a la velocidad de propagación, ω e igual a 1 para el éter, es decir, $\omega : c = 1 : n$, luego resulta:

$$n^2 = \varepsilon\mu, \qquad (8)$$

que es la relación de MAXWELL entre las propiedades electromagnéticas y las ópticas.

7. Ecuaciones de Hertz para medios en movimiento

HERTZ ha generalizado las ecuaciones de MAXWELL aplicándolas a medios en movimiento, conservando para ello la forma integral de las ecuaciones de MAXWELL con la condición de que las superficies σ y las curvas bordes, s, que intervienen en ellas, estén fijas *en la materia* y no en el espacio. Escribiremos, pues, $\frac{d}{dt}$ en lugar de $\frac{\partial}{\partial t}$, y tendremos:

$$c\int(\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \frac{}{dt}\int\varepsilon\,\mathfrak{E}_n d\sigma + \int\lambda\,\mathfrak{E}_n d\sigma, \qquad (1)$$

$$-c\int(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \frac{d}{dt}\int\mu\,\mathfrak{H}_n d\sigma. \qquad (2)$$

Aplicando ahora la fórmula (3) del Capítulo II, § 7, a las integrales de superficie derivadas respecto del tiempo, y el teorema de STOKES a los primeros miembros, obtendremos, designando por $\mathfrak{v}$ el vector velocidad de la materia:

$$\operatorname{rot}\{c\mathfrak{H} - [\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{v}]\} = \frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E} + \lambda\mathfrak{E}, \qquad (3)$$

$$-\operatorname{rot}\{c\mathfrak{E} + [\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{v}]\} = \frac{\partial\mu\mathfrak{H}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\mu\mathfrak{H}. \qquad (4)$$

Estas son las *ecuaciones de* HERTZ *en forma diferencial.*

Designando, como MAXWELL, por corriente $\mathfrak{E}$ el valor c rot $\mathfrak{H}$, esta corriente se compone de las siguientes partes:

$\lambda \mathfrak{E} = \mathfrak{J}$, corriente de conducción,

$\frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$, corriente de desplazamiento (reconocida por HERTZ),

$\mathfrak{v} \cdot \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E}$, corriente de convección (reconocida por ROWLAND),

$\operatorname{rot} [\varepsilon \mathfrak{E}, \mathfrak{v}] = \mathfrak{R}$, corriente de RÖNTGEN (reconocida por RÖNTGEN).

De (1) y (2) se deducen nuevamente, para superficies cerradas, las integrales que expresan la indestructibilidad de las masas eléctricas y magnéticas.

8. Las fuerzas ponderomotrices de la teoría de Maxwell-Hertz

Introduciendo en las ecuaciones (1) y (2) del párrafo anterior la notación $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ definida en el Capítulo II, § 7, (5), y aplicando el teorema de STOKES, resulta:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \underline{\frac{d \varepsilon \mathfrak{E}}{dt}} + \lambda \mathfrak{E}, \tag{1}$$

$$- c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \underline{\frac{d \mu \mathfrak{H}}{dt}}. \tag{2}$$

Multiplicando escalarmente estas ecuaciones (1) y (2) por $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{H}$, respectivamente, aplicando al primer miembro la relación (p) y representando por $\mathfrak{S}$ el vector de radiación de POYNTING $c[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$ (§ 5, (12)) se obtiene:

$$- \operatorname{div} \mathfrak{S} = \left(\mathfrak{E}, \underline{\frac{d \varepsilon \mathfrak{E}}{dt}} \right) + \left(\mathfrak{H}, \underline{\frac{d \mu \mathfrak{H}}{dt}} \right) + \lambda \mathfrak{E}^2. \tag{3}$$

Integremos ahora en un volumen S que conserve las mismas partículas materiales y apliquemos al primer miembro el teorema de GAUSS; tendremos entonces, designando por J (§ 5, (11)) el efecto de JOULE,

$$- \int_\sigma \mathfrak{S}_n \, d\sigma = \mathrm{J} + \int \left(\mathfrak{E}, \underline{\frac{d \varepsilon \mathfrak{E}}{dt}} \right) dS + \int \left(\mathfrak{H}, \underline{\frac{d \mu \mathfrak{H}}{dt}} \right) dS. \tag{4}$$

Vamos a transformar la integral

$$\int \left(\mathfrak{E}, \underline{\frac{d \varepsilon \mathfrak{E}}{dt}} \right) dS.$$

Según lo dicho en el Capítulo II, § 7, (6), se tiene:

$$\begin{aligned} \int \left(\mathfrak{E}, \underline{\frac{d \varepsilon \mathfrak{E}}{dt}} \right) dS = \int \left(\mathfrak{E}, \frac{d \varepsilon \mathfrak{E}}{dt} \right) dS + \int \varepsilon \mathfrak{E}^2 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{v} \, dS \\ - \int (\mathfrak{E}, (\varepsilon \mathfrak{E} \operatorname{grad}) \mathfrak{v}) \, dS. \end{aligned} \tag{5}$$

Supongamos que también en medios móviles es

$$W_e = \int \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2 \, dS$$

la energía eléctrica y que ε está ligada a la materia, de manera que es $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$; el primer término de la derecha, recordando (9) del Capítulo II, § 7, será:

$$\frac{dW_e}{dt} - \int \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2 \operatorname{div} \mathfrak{v} \, dS,$$

de modo que la (5) da:

$$\int\left(\mathfrak{E}, \frac{d\varepsilon\,\mathfrak{E}}{dt}\right) dS = \frac{dW_e}{dt} + \int\frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{E}^2 \cdot \operatorname{div} \mathfrak{v} \cdot dS - \int(\mathfrak{E}, (\varepsilon\,\mathfrak{E}\,\operatorname{grad})\,\mathfrak{v})\,dS. \tag{6}$$

Poniendo,

$$\frac{d' A_e}{dt} = +\int\frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{E}^2 \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dS - \int(\mathfrak{E}, (\varepsilon\,\mathfrak{E}\,\operatorname{grad})\,\mathfrak{v})\,dS, \tag{7}$$

y formando una expresión análoga a la (6) para la intensidad magnética del campo, en la que sea

$$\frac{d' A_m}{dt} = \int\frac{\mu}{2}\,\mathfrak{H}^2 \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dS - \int(\mathfrak{H}, (\mu\mathfrak{H}\,\operatorname{grad})\,\mathfrak{v})\,dS, \tag{8}$$

de (4), poniendo $d' A_e + d' A_m = d' A$, se deduce:

$$-\int \mathfrak{S}_n\, d\sigma = J + \frac{dW}{dt} + \frac{d' A}{dt}. \tag{9}$$

Esta ecuación representa el principio de la energía, cuando $d' A$ indica el trabajo realizado en una traslación infinitesimal por las fuerzas de origen electromagnético.

La ecuación (7) puede ponerse, teniendo en cuenta la (12) del Capítulo IV, § 4, y lo dicho en el Capítulo II, § 2, en la forma:

$$\frac{d' A_e}{dt} = \int\frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{E}^2 \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dS - \int(\operatorname{tens} \varepsilon\,\mathfrak{E}^2, \operatorname{def} \mathfrak{v})\,dS; \tag{10}$$

por consiguiente, según la fórmula (12) ahora citada, debemos atribuir a las fuerzas de origen eléctrico tensiones Π_e que se componen de la tensión

$$\Pi_e^{(1)} = \operatorname{tens} \varepsilon\,\mathfrak{E}^2$$

y la tensión normal, igual en todas las direcciones, $-\frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{E}^2$, o bien, expresándolas en coordenadas rectangulares:

$$\begin{aligned} \Pi_{xx}^{(e)} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_x^2 - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{E}^2; & \Pi_{yy}^{(e)} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_y^2 - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{E}^2; \\ \Pi_{zz}^{(e)} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_z^2 - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathfrak{E}^2; & \Pi_{xy}^{(e)} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{E}_y; \\ \Pi_{xz}^{(e)} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_x\,\mathfrak{E}_z; & \Pi_{yz}^{(e)} &= \varepsilon\,\mathfrak{E}_y\,\mathfrak{E}_z; \end{aligned} \tag{11}$$

y cosa análoga se dice para las tensiones magnéticas.

De aquí se deduce, aplicando lo dicho en el Capítulo IV, § 4, (4), la expresión de la fuerza por unidad de volumen:

$$\mathfrak{f}_e = \mathfrak{E} \operatorname{div} \varepsilon\,\mathfrak{E} + \varepsilon \cdot (\mathfrak{E}\,\operatorname{grad})\,\mathfrak{E} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2. \tag{12}$$

Expresando $(\mathfrak{E}\,\operatorname{grad})\,\mathfrak{E}$ por medio de (r) se encuentra:

$$\mathfrak{f}_e = \mathfrak{E} \operatorname{div} \varepsilon\,\mathfrak{E} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon - [\varepsilon\,\mathfrak{E}, \operatorname{rot} \mathfrak{E}]. \tag{13}$$

De la misma manera se obtiene:

$$\mathfrak{f}_m = \mathfrak{H} \operatorname{div} \mu\,\mathfrak{H} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu - [\mu\,\mathfrak{H}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}]. \tag{14}$$

Eliminemos rot $\mathfrak{E}$ y rot $\mathfrak{H}$, respectivamente, por medio de (1) y (2); si nos limitamos a cuerpos en reposo, podremos sustituir $\frac{d\varepsilon\,\mathfrak{E}}{dt}$ por $\frac{\partial \varepsilon\,\mathfrak{E}}{\partial t}$ y resulta:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_e + \mathfrak{f}_m = \mathfrak{E} \cdot \operatorname{div} \varepsilon\,\mathfrak{E} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon + \mathfrak{H} \cdot \operatorname{div} \mu\,\mathfrak{H} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{H}^2 \operatorname{grad} \mu + \frac{1}{c}[\lambda\,\mathfrak{E}, \mu\,\mathfrak{H}] + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon\,\mathfrak{E}, \mu\mathfrak{H}]. \tag{15}$$

Los dos primeros términos dan las fuerzas del campo electrostático; el tercero y el cuarto las del magnetos-

tático ; el penúltimo término es una fuerza en un conductor en el campo magnético, que obra perpendicularmente a la corriente y a este campo (ley de BIOT-SAVART).

En el vacío es :

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0 ; \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0 ; \quad \lambda = 0 ; \quad \varepsilon = 1 ; \quad \mu = 1 ;$$

luego

$$\operatorname{grad} \varepsilon = 0 ; \operatorname{grad} \mu = 0 ;$$

por consiguiente, en él es :

$$\mathfrak{f} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} . \tag{16}$$

En el caso de radiación variable, hay fuerzas que actúan en porciones del espacio en las que no existe materia, luego deben aparecer aquí aceleraciones infinitas, lo que indica un error en las ecuaciones fundamentales. Este inconveniente es evitado por las teorías de LORENTZ, COHN y MINKOWSKI.

Se ve por las ecuaciones (1) y (2) del parágrafo 7, que para cuerpos en móvimiento son aplicables las ecuaciones de MAXWELL sin modificación, si el sistema coordenado está invariablemente unido al cuerpo móvil; por consiguiente, según la teoría de HERTZ, un movimiento del sistema total no puede ser constatado por experimentos electromagnéticos, es decir, que la base de las perturbaciones electromagnéticas, el éter, debe moverse, según HERTZ, acompañando a la materia.

Los fenómenos de la aberración y el de DOPPLER no pueden, pues, ser explicados por la teoría de HERTZ prescindiendo de otros fenómenos, pues se refieren al movimiento del observador respecto del éter.

9. Inducción en una esfera que gira

Vamos a deducir de las ecuaciones de HERTZ las corrientes de inducción que se originan cuando una esfera conductora gira alrededor de uno de sus diámetros con velocidad constante, ω, en un campo magnético constante, $\mathfrak{H}$.

Tomemos el eje de rotación como eje de un sistema de coordenadas polares en el espacio r, ϑ, φ.

Supongamos que el conductor sea homogéneo, es decir, que ε, μ, λ sean constantes y, además, que en su interior no exista ningún magnetismo remanente; por tanto, que sea :

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0. \tag{1}$$

Por último, supongamos que estamos en el estado estacionario, de modo que también sean :

$$\frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} = 0 ; \quad \frac{\partial \mu \mathfrak{H}}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Como la velocidad sólo es una rotación en torno del eje $\vartheta = 0$, se tiene :

$$\mathfrak{v}_r = 0, \quad \mathfrak{v}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{v}_\varphi = \omega r \operatorname{sen} \vartheta. \tag{3}$$

Las ecuaciones de HERTZ, § 7, (3) y (4), se transforman, pues, en :

$$\operatorname{rot} \{ c\mathfrak{H} - [\varepsilon \mathfrak{E}, \mathfrak{v}] \} = \mathfrak{v} \cdot \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{E}, \tag{4}$$

$$- \operatorname{rot} \{ c\mathfrak{E} + [\mu \mathfrak{H}, \mathfrak{v}] \} = 0. \tag{5}$$

Formemos la divergencia de (4) ; teniendo presente (1) será, entonces :

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}+\operatorname{div}(\mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E})=0,$$

y aplicando (s) resulta:

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}+\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}\mathfrak{v}+(\mathfrak{v},\operatorname{grad}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E})=0. \quad (6)$$

Como se trata del movimiento de un sólido, es aplicable la condición de incompresibilidad:

$$\operatorname{div}\mathfrak{v}=0. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta, además (3), el producto escalar se escribe así en coordenadas polares (Cap. III, § 2, (l)):

$$(\mathfrak{v},\operatorname{grad}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E})=\omega\cdot r\operatorname{sen}\vartheta\frac{\partial}{r\operatorname{sen}\vartheta\,\partial\varphi}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E};$$

luego, según (6):

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}+\omega\frac{\partial\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial\varphi}=0. \quad (8)$$

Si, ahora, designamos por $\varrho=\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}$, multiplicamos (8) por $\varrho d\varphi$ e integramos de 0 a 2π se obtiene:

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\varrho^2\,d\varphi+\frac{\omega}{2}\Big|\varrho^2\Big|_0^{2\pi}=0. \quad (9)$$

El segundo término se anula, puesto que ϱ, como función de φ, tiene el período 2π; luego, como la primera integral tiene un integrando esencialmente positivo, tiene que ser:

$$\varrho=\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}=0. \quad (10)$$

De (5) se deduce por integración y teniendo en cuenta (m):

$$c\mathfrak{E}+[\mu\mathfrak{H},\mathfrak{v}]=\operatorname{grad}V, \quad (11)$$

donde V es un escalar (de integración) arbitrario.

Formando la divergencia de (11) y aplicando (10) se obtiene:

$$\triangle V=\operatorname{div}[\mu\mathfrak{H},\mathfrak{v}], \quad (12)$$

y, según (p), es:

$$\operatorname{div}[\mu\mathfrak{H},\mathfrak{v}]=(\mu\mathfrak{v},\operatorname{rot}\mathfrak{H})-(\mu\mathfrak{H},\operatorname{rot}\mathfrak{v}). \quad (13)$$

Limitándonos a la inducción de primer orden, podemos poner $\mathfrak{H}$ igual al campo uniforme originariamente dado; será, pues, $\operatorname{rot}\mathfrak{H}=0$. Además, según lo dicho en el Capítulo III, § 5, (5), rot $\mathfrak{v}$ es igual al duplo de la velocidad angular, vector que tiene la dirección $\vartheta=0$ y, por tanto, es paralelo al eje z.

Si $\mathfrak{H}$ es perpendicular al eje de rotación, por ejemplo, paralelo al eje x, es $(\mu\mathfrak{H},\operatorname{rot}\mathfrak{v})=0$; luego el valor de (13) es cero, y de (12) se sigue:

$$\triangle V=0. \quad (14)$$

Como en la superficie de la esfera ($r=r_0$) la componente normal de la corriente, $\lambda\mathfrak{E}$, debe anularse (pues si no fuese así en ella se acumularía infinita electricidad) de (11) se sigue que para $r=r_0$ debe ser:

$$\frac{\partial V}{\partial r}=[\mu\mathfrak{H},\mathfrak{v}]_r, \quad (15)$$

ecuación que da:

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\mu\mathfrak{H}_\vartheta\mathfrak{v}_\varphi-\mu\mathfrak{H}_\varphi\mathfrak{v}_\vartheta. \quad (16)$$

Ahora bien, la ecuación (3) es válida para este caso, y, además, es:

$$\mathfrak{H}_\vartheta = |\mathfrak{H}| \cos\varphi \cos\vartheta\,; \tag{17}$$

luego, para $r = r_0$ se tiene:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \mu |\mathfrak{H}| \omega r \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi. \tag{18}$$

V queda determinado unívocamente por el conocimiento de $\triangle V = 0$ en S y el de $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ en σ (véase Capítulo II, § 5).

La ecuación (18) expresa que para $r = r_0$ no existe ninguna componente radial de la corriente. Veamos si podemos admitir esto para toda la esfera.

Entonces sería válida (18) para cualquier valor de r, e integrando respecto a r resultaría:

$$V = \frac{\mu |\mathfrak{H}| \omega}{2} r^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi = \frac{\mu |\mathfrak{H}| \omega}{2} xz. \tag{19}$$

Como este valor satisface evidentemente a (18), pero también a (14), por su unicidad es (19) el verdadero valor, y en toda la esfera es:

$$\mathfrak{E}_r = 0. \tag{20}$$

Además, se deduce de (11):

$$\mathfrak{E}_x = \frac{\mu}{c}\frac{\omega}{2}|\mathfrak{H}|\, z, \qquad \mathfrak{E}_y = 0, \qquad \mathfrak{E}_z = -\frac{\mu}{c}\frac{\omega}{2}|\mathfrak{H}|\, x. \tag{21}$$

Las líneas de corriente se obtienen por medio de las ecuaciones diferenciales

$$dx : dy : dz = \mathfrak{E}_x : \mathfrak{E}_y : \mathfrak{E}_z$$

o, teniendo en cuenta (21):

$$dx : dy : dz = z : 0 : -x,$$

es decir, $y = \text{const.}$, y

$$x dx + z dz = d(x^2 + z^2) = 0, \text{ o bien, } x^2 + z^2 = \text{const.},$$

son las ecuaciones de una línea de corriente; las corrientes de inducción recorren, pues, circunferencias cuyos planos son paralelos al eje de rotación y a la dirección del campo.

La segunda de las ecuaciones de MAXWELL en la forma integral permite reconocer inmediatamente que un campo magnético en dirección del eje de rotación no da origen a ningún campo eléctrico, puesto que no existe ninguna superficie σ en la que como consecuencia de la rotación varíe el número de líneas, $\mu\mathfrak{H}$, que la atraviesen.

10. La teoría electrónica de Lorentz

Según la hipótesis de LORENTZ, no existe corriente alguna de conducción $\lambda\mathfrak{E}$, sino que está sustituída por la corriente de convección, $\varrho\mathfrak{v}$, de partículas materiales cargadas, los electrones. Además, tampoco existen como conceptos fundamentales la constante dieléctrica ni la permeabilidad, las cuales están definidas por el comportamiento de los electrones que se encuentran en la materia.

Según LORENTZ, el éter *reposa*, lo cual significa que las ecuaciones de MAXWELL permanecen *invariables* en un sistema coordenado *en reposo*, mientras que hemos visto que las ecuaciones de HERTZ, basadas en la hipótesis del éter móvil, permanecen invariables en un sistema coordenado que se mueve con él.

Las ecuaciones de LORENTZ serán, pues, designando por $\mathfrak{v}$ el vector velocidad de los electrones respecto de un sistema coordenado en reposo en el éter:

$$(1)\qquad c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho\mathfrak{v}, \qquad -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \qquad (2)$$

$$(3)\qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \varrho, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0. \qquad (4)$$

La fuerza $\mathfrak{f}$ correspondiente al volumen unidad se compone de la fuerza eléctrica $\varrho\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\cdot\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$ y de la electrodinámica $\frac{1}{c}[\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]$ que corresponde a la $\frac{1}{c}[\lambda\mathfrak{E}, \mu\mathfrak{H}]$ de la teoría de MAXWELL-HERTZ. Se tiene, por tanto:

$$\mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]. \qquad (5)$$

Las ecuaciones (1) a (5) constituyen el fundamento de la teoría de LORENTZ.

Formemos el trabajo $d'A$ realizado por la fuerza $\mathfrak{f}$ en el volumen S durante el tiempo dt en la traslación $\mathfrak{v}\cdot dt$:

$$d'A = \int_S (\mathfrak{f}, \mathfrak{v})\, dt\cdot dS, \qquad (6)$$

o bien, según (5),

$$\frac{d'A}{dt} = \int_S (\mathfrak{f}, \mathfrak{v})\, dS = \int \varrho(\mathfrak{E}, \mathfrak{v})\, dS. \qquad (7)$$

Según (5), la fuerza electromagnética no realiza trabajo alguno.

Multiplicando escalarmente la ecuación (1) por $\mathfrak{E}$ y la (2) por $\mathfrak{H}$, sumando los resultados e integrando en un volumen S encerrado por la superficie σ, resulta:

$$-c\int_\sigma [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_n\, d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dS + \int (\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{E})\, dS. \qquad (8)$$

Poniendo

$$c[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \mathfrak{S}, \qquad (9)$$

$$2\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dS = W \qquad (10)$$

y aplicando la ecuación (7), se obtiene:

$$\frac{d'A}{dt} + \int \mathfrak{S}_n\, d\sigma = -\frac{\partial W}{\partial t}, \qquad (11)$$

que expresa el principio de conservación de la energía. La pérdida de energía electromagnética en la unidad de tiempo se verifica a expensas de la energía radiada $\mathfrak{S}$ y del trabajo realizado.

Formando la divergencia de (1) se obtiene:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\varrho\mathfrak{v}) = 0, \qquad (12)$$

ecuación que recibe el nombre de ecuación de continuidad de la electricidad, y tiene la misma forma de la Hidrodinámica (Cap. V, § 1, (3)).

La fuerza total que actúa sobre una partícula cargada es, según (5):

$$\mathfrak{F} = \int \left\{\varrho\cdot\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]\right\} dS, \qquad (13)$$

o bien, aplicando (3) y (1) para eliminar ϱ :

$$\mathfrak{F} = \int \left\{ \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} + [\operatorname{rot} \mathfrak{H}, \mathfrak{H}] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{H}\right] \right\} dS. \quad (14)$$

Integrando por partes, el primer término se convierte en div (tens $\mathfrak{E}^2$) — ($\mathfrak{E}$ grad) $\mathfrak{E}$, y éste, según (r), es:

$$\operatorname{div} (\operatorname{tens} \mathfrak{E}^2) - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 + [\mathfrak{E}, \operatorname{rot} \mathfrak{E}],$$

o bien, expresando rot $\mathfrak{E}$ por su valor deducido de (2) :

$$\operatorname{div} (\operatorname{tens} \mathfrak{E}^2) - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 - \frac{1}{c}\left[\mathfrak{E}, \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right].$$

Sustituyendo éste en (14) y transformando [rot $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$] = — [$\mathfrak{H}$, rot $\mathfrak{H}$] por medio de (r) se encuentra, teniendo en cuenta (4) :

$$\mathfrak{F} = \int (\operatorname{div} \Pi_e + \operatorname{div} \Pi_m)\, dS - \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]\, dS. \quad (15)$$

Resulta, pues, para valor de la fuerza que actúa sobre el volumen unidad :

$$\mathfrak{f} = \operatorname{div} \Pi_e + \operatorname{div} \Pi_m - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]. \quad (16)$$

Los dos primeros términos de (16) son, precisamente, las fuerzas de la teoría de HERTZ expresables en función de las tensiones de MAXWELL (§ 8, (11)), cuando se pone $\varepsilon = \mu = 1$. Estas tenían el inconveniente de dar en el éter una fuerza $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$. Como vimos en (16), la teoría de LORENTZ agrega todavía otro término,

que, precisamente, anula la fuerza en el éter, cosa que, por otra parte, se hubiera podido deducir directamente de (5) por ser $\varrho = 0$ en el éter.

11. Transformación de las ecuaciones de Lorentz

Las ecuaciones de LORENTZ dadas en el parágrafo 10 son válidas para todo sistema en reposo en el éter. Como nuestros experimentos se realizan en la Tierra, que se mueve, conviene, para muchas cuestiones, referir las ecuaciones a un sistema móvil con la materia. Supongamos que la velocidad de los cuerpos $\mathfrak{w}$, sea constante en magnitud y dirección.

Para el sistema en reposo, las ecuaciones de LORENTZ, son, en su forma integral :

$$c \int (\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{E}_n\, d\sigma + \int \varrho \mathfrak{v}_n\, d\sigma, \quad (1)$$

$$-c \int (\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \frac{\partial}{\partial t} \int \mathfrak{H}_n\, d\sigma, \quad (2)$$

en las cuales $\mathfrak{v}$ representa la velocidad de los electrones referidos al éter.

Esta velocidad de los electrones no es preciso que coincida con la $\mathfrak{w}$ del cuerpo ponderable. Por ejemplo, en los conductores atravesados por una corriente, a la velocidad $\mathfrak{w}$ del conductor se agrega la $\mathfrak{v} - \mathfrak{w}$ de los electrones respecto del conductor.

Aplicando lo dicho en el Capítulo II, § 7, (3), podemos sustituir $\frac{\partial}{\partial t}$ por $\frac{d}{dt}$, lo que indicará que, en la diferenciación, la superficie de que se trata queda fija, y obtendremos :

$$c\int(\mathfrak{H}, d\mathfrak{s}) = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{E}_n\, d\sigma - \int \varrho \mathfrak{w}_n\, d\sigma$$
$$-\int \mathrm{rot}_n[\mathfrak{E}, \mathfrak{w}]\, d\sigma + \int \varrho \mathfrak{v}_n\, d\sigma, \tag{3}$$

$$-c\int(\mathfrak{E}, d\mathfrak{s}) = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{H}_n\, d\sigma - \int \mathrm{rot}_n[\mathfrak{H}, \mathfrak{w}]\, d\sigma. \tag{4}$$

La aplicación del teorema de STOKES al primer miembro da, teniendo en cuenta las ecuaciones (5) y (6) de la pág. 74 y observando que $\mathfrak{w}$ no depende de x, y, z:

$$c\,\mathrm{rot}\left\{\mathfrak{H} + \left[\mathfrak{E}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right]\right\} = \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \varrho\,(\mathfrak{v} - \mathfrak{w}), \tag{5}$$

$$-c\,\mathrm{rot}\left\{\mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right]\right\} = \frac{d\mathfrak{H}}{dt}. \tag{6}$$

El símbolo $\frac{d}{dt}$ denota, pues, derivación cuando son constantes las coordenadas móviles con el cuerpo; $\mathfrak{v} - \mathfrak{w}$ es la velocidad de los electrones referida al sistema móvil.

Vamos ahora a aplicar las ecuaciones (5) y (6) a la *Electrostática en la Tierra móvil*. Entonces será $\frac{d}{dt} = 0$, $\mathfrak{v} - \mathfrak{w} = 0$, y, como ya hemos dicho antes, $\mathfrak{w}$ es constante en magnitud y dirección. De (5) y (6) se deduce:

$$\text{(7)}\quad \mathrm{rot}\left\{\mathfrak{H} + \left[\mathfrak{E}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right]\right\} = 0, \qquad \mathrm{rot}\left\{\mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right]\right\} = 0, \quad \text{(8)}$$

$$\text{(9)}\quad \mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \varrho, \qquad \mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0. \quad \text{(10)}$$

Introduzcamos los nuevos vectores

$$\text{(11)}\quad \mathfrak{H} + \left[\mathfrak{E}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \mathfrak{H}', \qquad \mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \mathfrak{E}'. \quad \text{(12)}$$

En este caso, puesto que los electrones tienen la velocidad $\mathfrak{w}$ en el éter según § 10, (5), la fuerza que actúa sobre la unidad de electricidad en reposo respecto de la Tierra será $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}\right] = \mathfrak{f}$.

De las ecuaciones (7) y (8) se deduce:

$$\text{(13)}\quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{H}' = 0, \qquad \mathrm{rot}\,\mathfrak{E}' = 0. \quad \text{(14)}$$

Aplicando la fórmula (p) a la (9) se obtiene:

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E}' = \varrho - \mathrm{div}\left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \varrho - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{H}\right). \tag{15}$$

La (11), teniendo en cuenta la (10), da:

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{H}' = \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{E}\right). \tag{16}$$

Despreciando los términos en que aparece el factor $\left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2$, podremos sustituir en los primeros miembros de (15) y (16) $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{E}$ por $\mathfrak{H}'$ y $\mathfrak{E}'$, respectivamente, con lo cual se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}' = 0\ ^{(a)}; \quad \mathrm{div}\,\mathfrak{H}' = 0\ ^{(b)};\\ &\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}' = 0\ ^{(c)}; \quad \mathrm{div}\,\mathfrak{E}' = \varrho\ ^{(d)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Además, en los conductores se verifica

$$\mathfrak{E}' = 0, \tag{18}$$

puesto que en estados electrostáticos no puede actuar ninguna fuerza sobre las masas eléctricas en reposo en el conductor. Pero de (17)[a] y (17)[b] se sigue (Capítulo II, § 5):

$$\mathfrak{H}' = 0, \tag{19}$$

y de (17)[c]

$$\mathfrak{E}' = -\operatorname{grad} \Phi, \tag{20}$$

de modo que en los conductores, la (17)[d] se convierte en

$$\triangle \Phi = -\varrho, \tag{21}$$

y la (18) en

$$\Phi = \text{const.} \tag{22}$$

Las ecuaciones (19) a (22) son precisamente las condiciones de la Electrostática sobre la Tierra en reposo, puesto que $\mathfrak{H}'$ representa, como se ve fácilmente, la fuerza ejercida sobre la unidad de magnetismo que se mueve con la Tierra, es decir, el movimiento de la Tierra no puede constatarse por investigaciones electrostáticas siguiendo la teoría de LORENTZ.

12. Potenciales retardados

Tratamos ahora de encontrar integrales de las ecuaciones de LORENTZ cuando se da la distribución de electricidad, ϱ, y la velocidad de los electrones, $\mathfrak{v}$.

Con arreglo a lo establecido en el § 10, (4), de este capítulo, podemos poner:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Sustituyendo este valor en § 10, (2), se obtiene:

$$\operatorname{rot}\left(c\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) = 0, \tag{2}$$

de donde se sigue:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \Phi. \tag{3}$$

Sustituyendo los valores (1) y (3) en la fórmula (1) del § 10, se obtiene:

$$c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v}, \tag{4}$$

o bien, teniendo en cuenta la (o):

$$-c \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} + c\triangle \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varrho \mathfrak{v}. \tag{5}$$

Poniendo ahora, para simplificar,

$$c \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \text{ (1)}, \tag{6}$$

---

(1) Si, por un momento, suponemos dados $\mathfrak{E}$ y $\mathfrak{H}$, y $\mathfrak{A}_0$ y Φ_0 son un par de valores que satisface a (1) y (3), las fórmulas

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \operatorname{grad} X, \qquad \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}$$

dan uno de tales pares de valores para cualquier valor atribuído a X.

La ecuación (6) o, lo que es lo mismo, la

$$-\triangle X + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathfrak{A}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \tag{6'}$$

determina X.

la (5) se convierte en esta otra:

$$\triangle \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c}\varrho \mathfrak{v}. \tag{7}$$

La sustitución de (3) en la fórmula (3) del § 10 da:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi = \varrho, \tag{8}$$

y sustituyendo div $\mathfrak{A}$ por su valor (6) resulta:

$$\triangle \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\varrho. \tag{9}$$

Tenemos, pues, el sistema de las ecuaciones (7) y (9). Hallados Φ y $\mathfrak{A}$, se obtienen $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{E}$ por medio de las ecuaciones (1) y (3). La magnitud Φ recibe el nombre de potencial escalar y la $\mathfrak{A}$ el de potencial vectorial. Cuando se dan ϱ y $\mathfrak{v}$ como funciones del lugar y del tiempo, el problema que ha de ser resuelto es el de integrar las ecuaciones (7) y (9) con la condición (6).

Las ecuaciones (7) y (9) quedan incluídas dentro de la forma

$$\triangle U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -f. \tag{10}$$

El teorema de FOURIER demuestra que puede representarse f en función de t de esta manera [1]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{i\alpha(t-\lambda)}\, d\lambda, \tag{11}$$

[1] H. WEBER, *Partielle Differentialgleichungen*, tomo I, 5.ª edición, pág. 51. Braunschweig, 1910.

y análogamente,

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda)\, e^{i\alpha(t-\lambda)}\, d\lambda; \tag{12}$$

luego, según (10), será:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(t-\lambda)}\, d\lambda \left\{ \triangle U(\lambda) + \frac{\alpha^2}{c^2} U(\lambda) + f(\lambda) \right\} = 0, \tag{13}$$

ecuación que queda satisfecha cuando sea:

$$\triangle U(\lambda) + \frac{\alpha^2}{c^2} U(\lambda) = -f(\lambda). \tag{14}$$

De la fórmula (17) del Capítulo III, § 3, se deduce la integral

$$U(\lambda) = \int \frac{dS}{4\pi r}\, e^{\pm i\frac{\alpha}{c}r}\, f(\lambda). \tag{15}$$

Sustituyendo este valor en (12) se obtiene, cambiando el orden de integración:

$$U(t) = \int \frac{dS}{4\pi r} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{i\alpha\left(t \pm \frac{r}{c} - \lambda\right)}\, d\lambda, \tag{16}$$

fórmula que con auxilio de la (11) se convierte en esta otra:

$$U(t) = \int \frac{dS}{4\pi r} f\left(t \pm \frac{r}{c}\right). \tag{17}$$

Ahora bien, como U no puede depender de los estados que sobrevengan después (en el momento $t+\frac{r}{c}$), hay que prescindir del signo $+$ y, por consiguiente, la solución será:

$$U(t)=\int \frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}\,dS, \tag{18}$$

que da para los valores expresados por las fórmulas (7) y (9):

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{c}\int \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{4\pi r}\,dS, \tag{19}$$

$$\Phi=\int \frac{\overline{\varrho}}{4\pi r}\,dS, \tag{20}$$

representando con el trazo colocado sobre las magnitudes que figuran en los integrandos que la variable no es t, sino $t-\frac{r}{c}$.

Los valores (19) y (20) se llaman también, a causa de este retraso en el tiempo, *potenciales retardados*.

Queda aún por reconocer que la ecuación (6) queda satisfecha por estos valores. De (19) y (20) se deduce:

$$Z=c\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}+\frac{\partial \Phi}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int dS\left\{\mathrm{div}_p\,\frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\overline{\varrho}}{r}\right\}. \tag{21}$$

Es preciso ahora distinguir $\frac{\partial \overline{U}}{\partial t}$ y $\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$ de $\frac{\overline{\partial U}}{\partial t}$ y $\frac{\overline{\partial U}}{\partial x}$; los primeros símbolos indican que hay que poner $t-\frac{r}{c}$ en vez de t y después efectuar la derivación; y los últimos una derivación respecto de t y x, respectivamente, y una sustitución en los resultados de t por $t-\frac{r}{c}$.

Como al derivar respecto a t permanecen constantes x, y, z, es:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t}=\frac{\overline{\partial U}}{\partial t}; \tag{22}$$

por el contrario,

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}=\frac{\overline{\partial U}}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\overline{\partial U}}{\partial t}\frac{x-\xi}{r},$$

o bien, utilizando la notación vectorial:

$$\mathrm{grad}\,\overline{U}=\overline{\mathrm{grad}\,U}-\frac{1}{c}\frac{\overline{\partial U}}{\partial t}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r}, \tag{23}$$

pues $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ puede considerarse como un vector de componentes $x-\xi$, $y-\eta$ y $z-\zeta$.

Como en la fórmula (21) las coordenadas x, y, z han sido sustituídas en $\overline{\varrho \mathfrak{v}}$ por las coordenadas generales ξ, η, ζ en el campo de integración S, sólo quedan x, y, z en $\varrho \mathfrak{v}$, porque en esta magnitud interviene el argumento $t-\frac{r}{c}$; y se tiene:

$$\mathrm{div}_p\,\frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r}=\left(\overline{\varrho \mathfrak{v}},\,\mathrm{grad}_p\,\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{c}\left(\frac{\overline{\partial \varrho \mathfrak{v}}}{\partial t},\,\frac{\mathfrak{r}}{r^2}\right),$$

luego:

$$Z=\frac{1}{4\pi}\int dS\left\{\left(\overline{\varrho \mathfrak{v}},\,\mathrm{grad}_p\,\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{c}\left(\frac{\overline{\partial \varrho \mathfrak{v}}}{\partial t},\,\frac{\mathfrak{r}}{r^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\overline{\partial \varrho}}{\partial t}\right\}. \tag{24}$$

Además, es (Cap. III, § 4):

$$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_{p'} \frac{1}{r};$$

por consiguiente, sustituyendo este valor y aplicando la fórmula (s) al primer término del segundo miembro de la (24) resulta:

$$Z = \frac{1}{4\pi}\int dS \left\{ -\operatorname{div}_{p'} \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r} + \frac{1}{r}\operatorname{div}_{p'} \overline{\varrho \mathfrak{v}} - \frac{1}{c}\left(\frac{\overline{\partial \varrho \mathfrak{v}}}{\partial t}, \frac{\mathfrak{r}}{r^2} \right) + \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial \varrho}}{\partial t} \right\}. \quad (25)$$

Por otra parte, se tiene:

$$\operatorname{div}_{p'} \overline{\varrho \mathfrak{v}} = \overline{\operatorname{div}_{p'} \varrho \mathfrak{v}} + \frac{1}{c}\left(\frac{\overline{\partial \varrho \mathfrak{v}}}{\partial t}, \frac{\mathfrak{r}}{r} \right); \quad (26)$$

luego

$$Z = \frac{1}{4\pi}\int dS \left\{ -\operatorname{div}_{p'} \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r} + \frac{1}{r}\overline{\operatorname{div}_{p'} \varrho \mathfrak{v}} + \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial \varrho}}{\partial t} \right\}. \quad (27)$$

Aplicando el teorema de Gauss, el primer término dentro del paréntesis se transforma en una integral de superficie sobre una área situada en el infinito, y, por tanto, como $\varrho \mathfrak{v}$ es nulo en el infinito, la integral se anula. La suma de los otros dos términos es también nula según lo establecido en (12), § 10; por consiguiente, es:

$$Z = c \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

La única diferencia entre los potenciales dados por las fórmulas (19) y (20) y los establecidos en el Capítulo III, § 4 es el retraso en el tiempo; la ecuación (20) quiere, pues, decir:

Para hallar el valor del potencial Φ en el tiempo t en el punto p, se consideran en los distintos puntos del

espacio, no las densidades que existen en el momento t, sino las correspondientes al $t - \frac{r}{c}$; es decir, a un momento lo suficientemente anterior para que la perturbación llegue de p a p'. Dicho de otro modo: las ecuaciones (19) y (20) expresan que las perturbaciones electromagnéticas se propagan en el espacio con la velocidad, c, de la luz.

Tabla de fórmulas

(a) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{A})$

(b) $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$

(c) $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]$

(d) $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}]$

(e) $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = 0$

(f) $(\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]) = (\mathfrak{B}, [\mathfrak{C}, \mathfrak{A}]) = (\mathfrak{C}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}])$

(g) $(\mathfrak{A}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]) = 0$

(h) $\big[\mathfrak{A}, [\mathfrak{B}, \mathfrak{C}]\big] = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{A}) - \mathfrak{C}\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

Descomposición de un vector $\mathfrak{A}$ paralela y perpendicularmente al vector unidad $\mathfrak{s}_1$:

(h_1) $\mathfrak{A} = \mathfrak{s}_1\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1) + \big[\mathfrak{s}, [\mathfrak{A}, \mathfrak{s}_1]\big]$

(h_2) $([\mathfrak{A}, \mathfrak{B}], [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]) = \big(\mathfrak{A}, \big[\mathfrak{B}, [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]\big]\big) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{D}) - (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) \cdot (\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$

(h_3) $\big[[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}], [\mathfrak{C}, \mathfrak{D}]\big] = \mathfrak{C}\,([\mathfrak{A}, \mathfrak{B}], \mathfrak{D}) - \mathfrak{D}\,([\mathfrak{A}, \mathfrak{B}], \mathfrak{C}) = \mathfrak{B}\,([\mathfrak{C}, \mathfrak{D}], \mathfrak{A}) - \mathfrak{A}\,([\mathfrak{C}, \mathfrak{D}], \mathfrak{B})$

(i) $\dfrac{d}{dt}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \left(\dfrac{d\mathfrak{A}}{dt}, \mathfrak{B}\right) + \left(\mathfrak{A}, \dfrac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)$

(k) $\dfrac{d}{dt}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \left[\dfrac{d\mathfrak{A}}{dt}, \mathfrak{B}\right] + \left[\mathfrak{A}, \dfrac{d\mathfrak{B}}{dt}\right]$

(l) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0$

(m) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$

(n) $\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U$

(o) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}$

(p) $\operatorname{div} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = (\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{A}) - (\mathfrak{A}, \operatorname{rot} \mathfrak{B})$

(q) $\operatorname{rot} [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} \operatorname{grad}) \mathfrak{A} - (\mathfrak{A} \operatorname{grad}) \mathfrak{B}$

(r) $(\mathfrak{A} \operatorname{grad}) \mathfrak{B} + (\mathfrak{B} \operatorname{grad}) \mathfrak{A} = \operatorname{grad} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) - [\mathfrak{A}, \operatorname{rot} \mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}, \operatorname{rot} \mathfrak{A}]$

(s) $\operatorname{div} (U \cdot \mathfrak{A}) = U \operatorname{div} \mathfrak{A} + (\mathfrak{A}, \operatorname{grad} U)$.

En estas fórmulas representa:

1.° $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ el producto escalar:

$$\mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_z,$$

o bien, en coordenadas generales:

$$\mathfrak{A}_u \mathfrak{B}_u + \mathfrak{A}_v \mathfrak{B}_v + \mathfrak{A}_w \mathfrak{B}_w.$$

2.° $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ es el producto vectorial; su componente respecto del eje x es:

$$\mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y,$$

y la componente respecto a u en coordenadas generales

$$\mathfrak{A}_v \mathfrak{B}_w - \mathfrak{A}_w \mathfrak{B}_v.$$

3.° $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ es la divergencia de $\mathfrak{A}$, un escalar de valor

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z},$$

o bien, en coordenadas generales:

$$\frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left\{\frac{\partial e_2 e_1 \mathfrak{A}_u}{\partial u} + \frac{\partial e_3 e_1 \mathfrak{A}_v}{\partial v} + \frac{\partial e_1 e_2 \mathfrak{A}_w}{\partial w}\right\};$$

por ejemplo, en coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial r \mathfrak{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z},$$

y en coordenadas esféricas:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 \mathfrak{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \vartheta}\frac{\partial \operatorname{sen} \vartheta \mathfrak{A}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \vartheta}\frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial \varphi}.$$

4.° rot $\mathfrak{A}$ es el rotacional de $\mathfrak{A}$, un vector cuya componente respecto del eje x es:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z},$$

y la componente respecto de u en coordenadas generales:

$$\operatorname{rot}_u \mathfrak{A} = \frac{1}{e_2 e_3}\left\{\frac{\partial e_3 \mathfrak{A}_w}{\partial v} - \frac{\partial e_2 \mathfrak{A}_v}{\partial w}\right\}.$$

5.° grad U es el gradiente de U, un vector cuya componente respecto del eje x es:

$$\frac{\partial U}{\partial x},$$

y la componente respecto de u en coordenadas generales:

$$\operatorname{grad}_u U = \frac{\partial U}{e_1 \partial u}.$$

6.° ($\mathfrak{A}$ grad) es un operador que representa:

$$\mathfrak{A}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Teorema de la integral de GAUSS:

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dS = \int \mathfrak{A}_n\, d\sigma.$$

Teorema de STOKES:

$$\int \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma = \oint_{\mathfrak{S}} (\mathfrak{A}, d\mathfrak{s}).$$

Teoremas de GREEN:

$$\int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma = \int (U \triangle V - V \triangle U)\, dS$$

$$\int (\operatorname{grad} U)^2\, dS = \int U \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma - \int U \triangle U\, dS.$$

Expresión de $\triangle U$ en coordenadas cilíndricas:

$$\triangle U = \frac{1}{r}\frac{\partial r \dfrac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};$$

en coordenadas esféricas:

$$\triangle U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 rU}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.$$

Derivadas respecto al tiempo.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad} W). \tag{1}$$

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad})\, \mathfrak{M}. \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma = \int \frac{d\mathfrak{A}_n}{dt}\, d\sigma, \tag{3}$$

en cuyas fórmulas es:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{v}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} + \mathrm{rot}\,[\mathfrak{A}, \mathfrak{v}],$$

o bien:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} + \mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v} - (\mathfrak{A}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{v}. \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\int U dS = \int \left\{\frac{\partial U}{\partial t} + \mathrm{div}\,(U\mathfrak{v})\right\} dS = \int \left\{\frac{dU}{dt} + U\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v}\right\} dS. \tag{5}$$

Tensores

(1) $\mathfrak{B} = (\pi)\,\mathfrak{A}$ tiene las componentes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x &= \pi_{xx}\mathfrak{A}_x + \pi_{xy}\mathfrak{A}_y + \pi_{xz}\mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_y &= \pi_{yx}\mathfrak{A}_x + \pi_{yy}\mathfrak{A}_y + \pi_{yz}\mathfrak{A}_z \\ \mathfrak{B}_z &= \pi_{zx}\mathfrak{A}_x + \pi_{zy}\mathfrak{A}_y + \pi_{zz}\mathfrak{A}_z. \end{aligned} \qquad \pi_{ik} = \pi_{ki}$$

(2) tens $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ está determinado por los parámetros:

$$\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x,\ \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y,\ \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z,\ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y),\ \text{etc.}$$

(3) tens $\mathfrak{A}^2$ por los:

$$\mathfrak{A}_x^2,\ \mathfrak{A}_y^2,\ \mathfrak{A}_z^2\ \mathfrak{A}_y\mathfrak{A}_z,\ \text{etc.}$$

(4) $$((\pi)\,\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}) = (\pi,\ \mathrm{tens}\,(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})),$$

siendo:

$$(\pi, \mathrm{tens}\,\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \pi_{xx}\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \ldots + 2\pi_{yz}\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y) + \ldots$$

(5) def $\mathfrak{q}$ está determinada por los parámetros:

$$\frac{\partial \mathfrak{q}_x}{\partial x},\ \frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial y},\ \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial z},\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{q}_y}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{q}_z}{\partial y}\right),\ \text{etc.}$$

ÍNDICE ALFABÉTICO

Adición de vectores, 8.
Aceleración, 17.

Biot-Savart (Ley de), 33 y 40.

Campo, 2.
— vectorial, 2.
— escalar, 2.
Canal de torbellino, 136.
Circulación (Corriente de), 145 y 156.
Coeficiente de difusión, 139.
Cohn, 160.
Componentes de un vector, 6.
— — — rotacional, 55.
Conexión, 59.
Constante dieléctrica, 100 y 145.
Continuidad (Ecuaciones de), 132, 138 y 167.
Convección (Corriente de), 156 y 165.
Coordenadas cilíndricas, 77.
— curvilíneas, 76 y 130.
— esféricas, 78.
— polares, 78.
Coriolis (Fuerza de), 98.
Cortes, 59.
Corriente de conducción, 145 y 156.
— — convección, 156 y 165.
— — desplazamiento, 145 y 156.
— — R ntgen, 156.
Corrimientos electrolíticos, 137.
— infinitesimales, 120.
Curvatura de una línea alabeada, 15.

D'Alembert, 132.
Deformaciones, 93 y 127.
Densidad eléctrica, 51.
Derivada de un vector, 15.
— en una dirección, 41.
Desviación (Momentos de desviación), 114.
Difusión (Coeficientes de), 139.
Dilatación, 96.
Directo (Sistema), 6.
Discontinuidades, 68.
Divergencia, 46.
— de un tensor, 125.
Doppler, 160.

Ecuaciones de continuidad, 132, 138 y 167.
— — Euler, 131.
— — Hertz, 155 y 161.
— — Laplace, 82.
— — las ondas, 82.
— — Maxwell, 140.
— — Newton, 45.
— del potencial, 82.
Efecto de Joule, 150.
Electrones, 165.
Electrostática, 170.
Elipsoide de inercia, 113.
— — presiones, 126.
— — un tensor, 104.
Energía cinética, 45.
— eléctrica, 152.
— electromagnética, 151.
— magnética, 152.
— potencial, 45.
Esfuerzos elásticos, 126.

Esfuerzos superficiales, 122.
Eter, 160 y 165.
Euler (Ecuación de Euler), 131.

Faraday (Hipótesis de), 50 y 69.
— (Ley de inducción de), 50.
Fourier (Teorema de), 174.
Fuentes, 50.
Fuerzas centrífuga, 98.
— de Coriolis, 98.
— elásticas, 122 y 126.
— pondero-motrices, 156.
Función de fuerzas, 43.
— vectorial lineal, 98.

Gauss (Teorema de la integral de), 46.
Gradiente, 38.
Green (Teorema de), 64.

Hamilton, 45.
Helicoidal (Movimiento), 96.
Helmholtz (Teorema del torbellino, de), 134.
Herpolodia, 119.
Hertz (Ecuaciones de), 155 y 161.

Impulso de rotación, 116.
Incompresibilidad, 132.
Indice de refracción, 154.
Inducción eléctrica, 50, 69 y 145.
Inercia (Elipsoide de), 113.
— (Momento de), 113.
Infinitesimal (Corrimiento), 120
Integral curvilínea, 41.
— de Gauss (Teorema de la), 46.
— — la fuerza viva, 45.
— — superficie, 46.
Intensidad del campo, 141.

Joule (Efecto de), 150.

Keplero (Ley de), 26.

Lagrange, 133.
Lamé, 41.
Laplace (Ecuación de), 82.
Leyes de Biot-Savart, 33 y 140.
— — inducción de Faraday, 50.
— — Keplero, 26.
— — Ohm, 143.
Líneas de fuerza, 51.
— — inducción, 51.
— — torbellino, 135.
— vectoriales, 5.
Lorentz (Teoría de), 165.

Magnitudes escalares, 1.
— vectoriales, 1.
Manantiales, 50.
Maxwell (Ecuaciones de), 140.
Minkowski, 160.
Módulo de un vector, 3.
Momento de desviación, 114.
— — inercia, 113.
— — rectangular, 114.
— — torbellino, 135.
— — una fuerza, 25.
— — un par, 116.
Movilidad, 138.
Movimiento del peón, 114.
— helicoidal, 96.

Nernst, 140.
Newton (Ecuaciones del movimiento, de), 45.
Nivel (Superficies de), 2 y 38.

Ohm (Ley de), 143.
Onda (Ecuación de la onda), 82.
Orden de conexión, 59.
Osmótica (Presión), 137.

Peón (Movimiento del), 114.
Permeabilidad, 146.
Poisson (Ecuación de), 85.
Polodia, 119.
Potencial de velocidad, 116.
— escalar, 90 y 174.
— retardado, 172.
— vectorial, 92 y 174.
Poynting (Vector de), 151.
Presión, 123 y 127.
— osmótica, 137.
Presiones (Elipsoide de), 126.

Producto de inercia, 114.
— escalar, 18.
— vectorial, 21.

Radiación, 151.
Regla del sacacorchos, 6.
Röntgen (Corriente de), 156.
Rotacional, 51.
Rowland, 156.

Sacacorchos (Regla del), 6.
Savart (Ley de Biot-), 33 y 40.
Sistema directo, 6.
— giratorio de referencia, 98.
— inverso, 6.
— retrógrado, 6.
Solenoides, 50.
Stokes (Teorema de), 54.
Sumideros, 50.
Superficies de nivel, 2 y 38.
— dobles, 70.
Sustracción de vectores, 10.

Tensiones, 122.
— de Maxwell, 158, 159 y 168.
— normal, 126.
Tensiones.
— tangencial, 126.
Tensor, 98.
— (Elipsoide de un), 104.
— ortogonal, 100.
— simétrico, 100.
Teorema de Fourier, 174.
— — Green, 64.
— — Helmholtz, 134.
— — la integral de Gauss, 46.
— — Stokes, 54.
Torbellino, 51.
— (Canal de), 136.
— (Línea de), 135.
— (Momento de), 135.

Unicidad (Demostración de la), 65.

Valor absoluto de un vector, 7.
Van t'Hoff, 137.
Vector de Poynting, 151.
— potencial, 43 y 89.
— solenoidal, 50 y 89.
Velocidad, 17.
— angular, 93 y 113.
Vértices, 51.

NUEVAS PUBLICACIONES TÉCNICAS

Matemáticas para Ingenieros. ROSE, W. — 2 tomos. Con un total de 1,120 páginas, 412 figuras y numerosos ejemplos resueltos. *(2.ª edición).*

La Máquina dinamoeléctrica de corriente continua. ARNOLD-LA-COUR. — Su teoría, experimentación, construcción, cálculo y funcionamiento.

Tomo I. Teoría y experimentación. — 764 páginas con 570 figuras.

Tomo II. Construcción, cálculo y funcionamiento. — 775 páginas con 550 figuras y 18 láminas.

Electrotecnia. THOMÄLEN, DR. A., Profesor de la Escuela Técnica Superior de Karlsruhe. — 608 páginas, 555 figuras. *(2.ª edición).*

Centrales generadoras de energía eléctrica, por H. KYSER, Ingeniero Diplom. 870 páginas, 665 figuras, 2 láminas y 87 tablas numéricas.

La Escuela del técnico electricista, publicado bajo la dirección del Prof. A. HOLZT, del Instituto Superior Técnico de Mittweida. 14 tomos.

I. Fundamentos de la Electrotecnia, 1.ª Parte. — II. Fundamentos de la Electrotecnia, 2.ª Parte. — III. Técnica de las medidas eléctricas. — IV. Teoría, cálculo y construcción de las máquinas de corriente continua. — V. Teoría, cálculo y construcción de las máquinas de corriente alterna sincrónicas. — VI. Teoría, cálculo y construcción de las máquinas de corriente alterna asincrónicas. — VII. Teoría, cálculo y construcción de los transformadores. — VIII. Acumuladores. — IX. Técnica de la iluminación eléctrica. — X. Canalizaciones y centrales eléctricas. — XI. Transporte de fuerza. Tracción eléctrica. — XII. Técnica de la alta tensión. — XIII. Telecomunicación por conductores. — XIV. Alta frecuencia y Radiotecnia.

Manual del Constructor de Máquinas. Publicado bajo la dirección del Profesor H. DUBBEL, con la colaboración de numerosos especialistas. — 2 tomos con un total de 1972 páginas, 3000 figuras y numerosas tablas. *(2.ª edición).*

Resistencia de Materiales. MORLEY, A. — 688 páginas, 250 figuras y numerosos ejemplos resueltos. *(3.ª edición).*

Compendio de Resistencia de materiales, por el Prof. I. RUBIO SANJUÁN. — 990 páginas, 749 figuras, 7 láminas y numerosos ejercicios, tablas y proyectos. *(3.ª edición corregida y ampliada).*

Teoría de las Estructuras. MORLEY, A. — 732 páginas, 324 figuras, 4 láminas y numerosos ejemplos resueltos. *(2.ª edición).*

Cristalografía, por A. K. BOLDYREV, Prof. de la Escuela de Minas y Director del Instituto Federov de Leningrado. — 432 páginas, 254 figuras y 2 láminas en color.